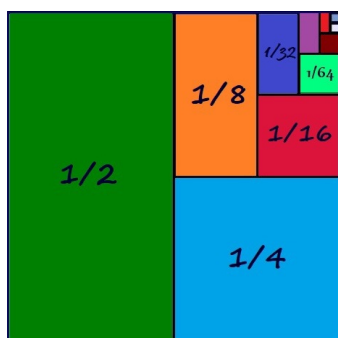




Beata Strycharz-Szemberg

Notatki do wykładu

Wstęp do Analizy Matematycznej



KATEDRA MATEMATYKI STOSOWANEJ WIiT
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Przewidywany plan wykładu

- ❶ Wiadomości wstępne
- ❷ Ciągi liczbowe
- ❸ Szeregi liczbowe
- ❹ Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej

„Notatki do wykładu” nie zawierają pełnej tematyki, która będzie poruszana na wykładzie!!!

Część I

Wiadomości Wstępne

1 Naiwna Teoria Zbiorów

Zakładamy, że słuchacz wykładu *Wstęp do Analizy Matematycznej* zna podstawy logiki matematycznej i teorii mnogości, czyli teorii zbiorów, na poziomie szkoły średniej. Tematy te będą ponadto rozważane równolegle na wykładzie *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*.

W celu ustalenia terminologii i oznaczeń przypomnimy teraz pewne wiadomości z obu dziedzin.

W dalszym ciągu będziemy używać następujących oznaczeń dla spójników logicznych i kwantyfikatorów:

- $\neg$ dla negacji;
- $\wedge$ dla koniunkcji;
- $\vee$ dla alternatywy;
- $\Rightarrow$ dla implikacji;
- $\Leftrightarrow$ dla równoważności;
- $\forall$ dla kwantyfikatora ogólnego;
- $\exists$ dla kwantyfikatora szczegółowego.

Często używane są też następujące oznaczenia:

- $\exists!$ — „istnieje **dokładnie** jeden ...”;
- $\forall!$ — „dla **prawie** wszystkich ...”.

Przyjmuje się, że pojęcie *zbioru* jest pojęciem pierwotnym. Należy to rozumieć w taki sposób, że nie ma żadnej definicji określającej, czym jest zbiór. W zamian przyjmujemy pewne intuicyjne rozumienie tego terminu.

Zbiory będziemy zwykle oznaczać dużymi literami łacińskiego alfabetu $A, B, M, X, Y, \dots$, czasami będziemy wprowadzać zapis indeksowany $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$. Z kolei elementy zbioru będziemy oznaczać zwykle małymi literami $a, b, m, x_1, x_2, \dots$ (z indeksami lub bez indeksów). Do wskazania, że pewien element należy (nie należy) do zbioru używamy symbolu $\in$ ($\notin$), stąd piszemy $a \in A$ ($a \notin A$). Zbiór, do którego nie należy żaden element, czyli zbiór pusty, będziemy oznaczać symbolem $\emptyset$.

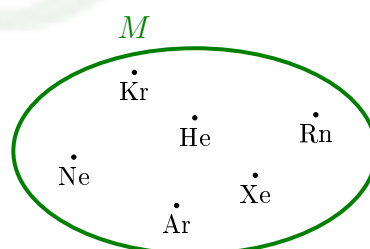
Najprostszą formą wprowadzania zbioru jest wypisanie jego elementów w nawiasach klamrowych (kolejność wypisywania jest bez znaczenia), np.:

$$M := \{\text{He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn}\}.$$

Jest to niezawodna metoda w przypadku zbioru o skończonej i niezbyt dużej liczbie elementów. Jeżeli interesują nas zbiory nieskończone lub przynajmniej bardzo obszerne, to zapis sprawia więcej kłopotów. Można czasem posługiwać się zapisem domyślnym, jednak ten sposób bywa zawodny i nieskuteczny. Dlatego w użyciu pozostaje zapis predykatowy, którego zadaniem jest określenie cechy wyróżniającej elementy rozważanego zbioru, np.:

$$M := \{a : a \text{ jest gazem szlachetnym}\}.$$

Zwykle taka notacja wykorzystuje wszelkie dostępne konwencje matematyczne. Bardzo często, szczególnie w szkole, stosuje się przedstawienie graficzne zbiorów, np.:



Uwaga Symbol „ $:=$ ” używany jest w definicjach. Dwukropek wskazuje, która strona równości jest definiowana.

Poniżej wypiszemy kilka oznaczeń podstawowych zależności i operacji na zbiorach wraz z ich wyjaśnieniem.

Definicja 1.1. Niech A i B będą zbiorami.

- a) Zbiór A nazywamy *podzbiorem* zbioru B , jeśli każdy element należący do zbioru A należy także do zbioru B , co zapisujemy w następujący sposób:

$$A \subseteq B \iff \forall_a (a \in A \Rightarrow a \in B).$$

Mówimy także, że zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B , a zbiór B nazywamy *nadzbiorem* zbioru A . Relację „ $\subseteq$ ” określamy mianem *inkluzji*.

- b) Zbiory A i B są *równe*, jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$:

$$A = B \iff \forall_a (a \in A \Leftrightarrow a \in B).$$

- c) Zbiór A nazywamy *podzbiorem właściwym* zbioru B , jeśli $A \subseteq B$ i $A \neq B$:

$$A \subsetneq B \iff \forall_a (a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\exists a \in B : a \notin A).$$

Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru: $\forall_{A-\text{zbiór}} \emptyset \subseteq A.$

Uwaga W starszych pozycjach zawieranie się zbiorów oznaczano symbolem $\subset$, a zawieranie właściwe było dodatkowo zaznaczane. Potem zaczęto używać symbolu $\subseteq$ na oznaczenie dowolnych podzbiorów (także niewłaściwych), a symbolu $\subset$ dla podzbiorów właściwych. Do dziś znaczenie symbolu $\subset$ nie jest standardowo określone i zależy od autora!

Przykład 1.2.

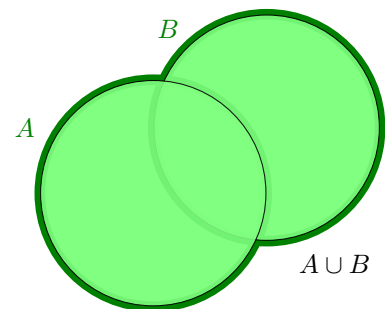
- ❶ $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq \{8, 6, 4, 2\}$
- ❷ $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8\}$
- ❸ $\{2, 4, 6, 8\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\neg (\{2, 4, 6, 8\} \subsetneq \{8, 6, 4, 2\})$

Z dowolnych zbiorów A i B można utworzyć nowe zbiory.

Definicja 1.3. Niech A i B będą podzbiórmi pewnego zbioru U .

- a) Zbiór

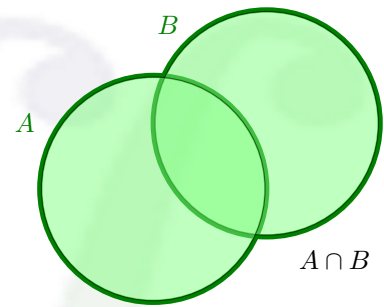
$$A \cup B := \{a : a \in A \vee a \in B\}$$



zawierający wszystkie elementy, które można zaczerpnąć ze zbioru A lub ze zbioru B nazywamy *sumą mnogościową* zbiorów A i B .

b) Zbiór

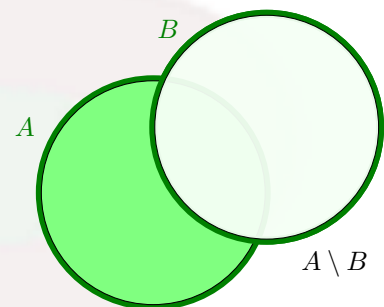
$$A \cap B := \{a : a \in A \wedge a \in B\}$$



zawierający tylko te elementy, które należą równocześnie do zbiorów A i B nazywamy *iloczynem mnogościowym (przekrojem, częścią wspólną)* zbiorów A i B .

c) Zbiór

$$A \setminus B := \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$$



zawierający tylko te elementy zbioru A , które nie należą do zbioru B nazywamy *różnicą mnogościową* zbiorów A i B .

Przykład 1.4.

- ❶ $\{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\{2, 4, 6, 8\} \cup \{8, 6, 4, 2\} = \{2, 4, 6, 8\}$
- ❷ $\{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \emptyset$
 $\{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$
- ❸ $\{2, 4, 6, 8\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 6, 8\}$
 $\{2, 4, 6, 8\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{6, 8\}$

Uwaga Często wszystkie zbiory, które będziemy rozważać, będą podzbiorami pewnego ustalonego zbioru U . Taki zbiór wszystkich możliwych elementów, jakie dopuszczamy w toku naszych rozważań będziemy nazywać *przestrzenią, zbiorem uniwersalnym* lub *uniwersum*. Jeśli uniwersum U jest podane, to możemy zdefiniować *dopełnienie* zbioru $A \subseteq U$ jako zbiór wszystkich tych elementów U , które nie należą do zbioru A . Dopełnienie oznaczamy symbolem A^c (lub A'), tzn. $A^c = U \setminus A$.

Podamy teraz najważniejsze własności działań na zbiorach, które można sprawdzić korzystając z rachunku zdań i z rachunku kwantyfikatorów.

Własności 1.5. Niech A , B i C będą podzbiorami przestrzeni U . Wtedy zachodzą:

- Prawa przemienności:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{oraz} \quad A \cap B = B \cap A;$$

- Prawa łączności:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C;$$

- Prawa rozdzielności:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

- Prawa idempotentności:

$$A \cup A = A \quad \text{oraz} \quad A \cap A = A;$$

- Elementy neutralne:

$$A \cap U = A \quad \text{oraz} \quad A \cup \emptyset = A;$$

- Elementy dominujące:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{oraz} \quad A \cup U = U.$$

- Prawa de Morgana:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{oraz} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Zadanie Sprawdzić, czy

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad \text{oraz} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Prawa łączności pozwalają na sensowne zdefiniowanie operacji $\cup$ i $\cap$ także dla dowolnych (nieskończonych) rodzin zbiorów (por. wykład *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*). Niech T będzie niepustym zbiorem indeksów, np. $T = \mathbb{N}$. Jeżeli $(A_t)_{t \in T}$ jest rodziną zbiorów, to sumę i iloczyn tej rodziny definiujemy następująco:

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \left\{ x : \exists_{t_0 \in T} x \in A_{t_0} \right\} \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{t \in T} A_t := \left\{ x : \forall_{t \in T} x \in A_t \right\}.$$

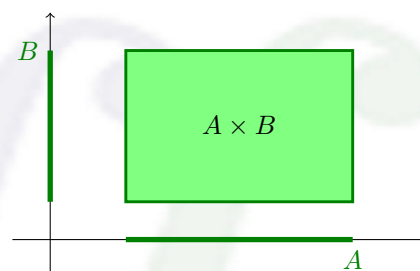
Zadanie Sprawdzić, że:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n} \right] = (2, 4] \quad \text{i} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} \left[2 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n} \right] = (2, 3).$$

Kolejnym ważnym działaniem na zbiorach jest iloczyn kartezjański. Pierwszym krokiem w zdefiniowaniu pojęcia iloczynu kartezjańskiego jest wprowadzenie pojęcia *pary uporządkowanej* elementów pochodzących z pewnych zbiorów A i B (por. wykład *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*). Taką parę zapisujemy dla odróżnienia od normalnego zbioru dwuelementowego w nawiasach okrągłych: (a, b) . Należy pamiętać, że kolejność zapisu (inaczej niż w zbiorze) ma tutaj zasadnicze znaczenie i para uporządkowana (a, b) jest zwykle różna od pary (b, a) . Równość par $(a, b) = (c, d)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.

Definicja 1.6. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

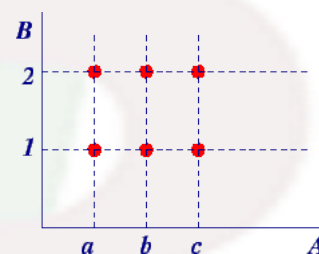


wszystkich par uporządkowanych zbudowanych z elementów zbioru A umieszczonych na pierwszym miejscu oraz elementów zbioru B umieszczonych na drugim miejscu.

Przykład 1.7.

❶ Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$ jest zbiór

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$



❷ Dla każdego zbioru A zachodzi

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad \text{i} \quad \emptyset \times A = \emptyset.$$

Podobnie dla zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ definiujemy ich iloczyn kartezjański

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

2 Zbiory liczbowe

Trudno jest wytłumaczyć, co to są liczby. Jeszcze trudniej – czym są liczby rzeczywiste. Z tego właśnie powodu w szkole uczymy się jedynie posługiwania się liczbami, a nie wyjaśnianiem ich natury (stąd zapewne biorą się trudności przy wprowadzaniu liczb zespolonych).

Na tym wykładzie będziemy postępować podobnie jak w szkole, a trudność wprowadzania zbiorów liczbowych pozostawimy wykładowi ze *Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości*.

Zbiór *liczb naturalnych* będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Praktyczne i często stosowane jest oznaczenie

$$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Uwaga

Inne, często stosowane podejście to

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{ i } \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Zbiór liczb naturalnych ma bardzo ważną własność nazywaną *zasadą indukcji matematycznej* (por. wykład *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*). Zasada indukcji matematycznej znana głównie jako metoda dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych służy również definiowaniu pewnych obiektów matematycznych. Definicje tego typu nazywane są definicjami *indukcyjnymi* lub *rekurencyjnymi*. Już w szkole można się z nimi zetknąć, tak można zdefiniować np. ciąg arytmetyczny i geometryczny, podając wartość pierwszego wyrazu a oraz

- różnicy r dla ciągu arytmetycznego:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} := a_n + r;$$

- ilorazu q dla ciągu geometrycznego:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} := a_n \cdot q.$$

W zbiorze liczb naturalnych określone są dwa działania: dodawanie i mnożenie. Rozszerzając zbiór liczb naturalnych w taki sposób, by w większym zbiorze każde równanie postaci $n + x = m$ miało rozwiązanie, otrzymujemy zbiór liczb całkowitych.

Zbiór *liczb całkowitych* oznaczamy symbolem

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Oczywiście zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem właściwym zbioru liczb całkowitych, tzn. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

Uwaga

Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ wraz z dodawaniem jest strukturą algebraiczną zwaną *grupą przemenną*.

Rozszerzając z kolei zbiór liczb całkowitych tak, by w większym zbiorze liczbowym każde równanie postaci $q \cdot x = p$ dla $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, miało rozwiązanie, otrzymujemy zbiór liczb wymiernych.

Zbiór *liczb wymiernych* czyli takich, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}.$$

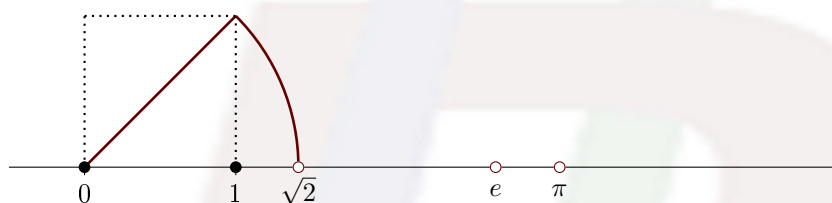
Łatwo zauważyć, że zachodzi inkluzja $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, ponieważ każda liczba $p \in \mathbb{Z}$ może być utożsamiona z ułamkiem $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$. Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, np. 0,4 lub $12,(3)$.

Uwaga

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wraz z dodawaniem i mnożeniem tworzy strukturę algebraiczną zwaną *ciałem*.

Niestety, zbiór liczb wymiernych ma wady. Wprawdzie jest gęsty, tzn. dla dowolnych dwu liczb wymiernych istnieje trzecia położona między nimi. Jest jednak dziurawy, przy tym jego dziury są również rozmieszczone w sposób gęsty, tzn. między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi znajduje się zawsze dziura. Te dziury biorą się nie ze starości zbioru, nie wskutek przetarcia zbioru w wyniku tak częstego używania liczb wymiernych w praktyce. Po prostu taka jest matematyczna natura tego zbioru. Zbiór liczb wymiernych ma postać bardzo gęstego jednowymiarowego sita.

[Roman Sikorski, Delta 01/1974, http://www.wiwi.pl/delta/czy_liczby.asp]



Istnieją liczby, które nie są wymierne, np. $\sqrt{2}$ lub $0,101001000100001\dots$. Nazywamy je liczbami niewymiernymi i będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{I}\mathbb{Q}$. Można pokazać, że liczb niewymiernych jest nawet w pewnym sensie znacznie „więcej” niż liczb wymiernych (por. *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*). Każda liczba niewymierna ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe. Liczb niewymiernych nie można przedstawić w postaci ułamka zwykłego.

Znane liczb niewymierne:

$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ – długość przekątnej w kwadracie o boku długości 1,
 $\pi = 3,141592654\dots$ – ludolfina, stosunek obwodu okręgu do długości jego średnicy,
 $e = 2,71828182\dots$ – liczba Eulera (Nepera), granica pewnego ciągu liczbowego.

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ to jeden z ważniejszych zbiorów w całej matematyce. Intuicyjnie ich definicja jest dość prosta. Zbiór liczb rzeczywistych otrzymujemy ze zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wypełniając „niewymierne luki” na osi liczbowej. Oczywiście nie jest to ścisła matematyczna definicja. Dokładna konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych zostanie podana na wykładzie ze *Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości*.

My na razie będziemy sobie wyobrażać $\mathbb{R}$ jako zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych:

$$\mathbb{R} := \text{zbiór ułamków dziesiętnych}$$

Oczywiście $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

2.1 Zbiór liczb rzeczywistych

W zbiorze liczb rzeczywistych określone są działania (czyli funkcje)

$$\text{dodawania: } + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R},$$

$$\text{mnożenia: } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R},$$

przy czym działania te mają następujące własności (W części z nich nie ma kwantyfikatorów, w takich przypadkach przyjmujemy, że własności zachodzą dla wszystkich wartości zmiennych):

Własności 2.1. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- łączność dodawania:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

- istnienie zera – elementu neutralnego dodawania:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x = 0 + x$$

- istnienie liczby przeciwnej ($-x$):

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists! (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

- przemienność dodawania:

$$x + y = y + x$$

- łączność mnożenia:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- istnienie jedynki – elementu neutralnego mnożenia:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

- istnienie liczby odwrotnej $\frac{1}{x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists! \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x$$

- przemienność mnożenia:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- rozdzielnosc mnożenia względem dodawania:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Uwaga

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, podobnie jak zbiór liczb wymiernych, wraz z dodawaniem i mnożeniem jest strukturą algebraiczną zwaną *ciałem*.

Korzystając z powyższych reguł łatwo można chociażby wykazać, że elementy neutralne wyznaczone są w sposób jednoznaczny. Ponadto wynika z nich mnóstwo własności działań arytmetycznych w zbiorze liczb rzeczywistych, które powinny być znane jeszcze ze szkoły średniej. Szczególnie warty wspomnienia jest fakt, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma *dzielników zera*.

$$\begin{aligned} & \bullet \quad x \cdot y = x \cdot z \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \implies \quad y = z; \\ & \bullet \quad x \cdot y = 0 \quad \iff \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0. \end{aligned}$$

Przykład 2.2.

📖 Na wykładzie!

2.1.1 Znak sumy i iloczynu

Sumę i iloczyn liczb $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, oznaczamy w następujący sposób

$$\sum_{i=m}^n a_i := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n,$$

$$\prod_{i=m}^n a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Własności 2.3. znaku sumy:

- „Pusta” suma: Jeśli górny indeks n jest mniejszy od dolnego indeksu m (zbiór indeksów jest pusty), wtedy z definicji

$$\sum_{i=m}^n a_i = 0 \quad \text{dla } m > n.$$

- Prawo łączności: Jeśli l jest liczbą całkowitą między m i n , wtedy

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^l a_i + \sum_{i=l+1}^n a_i.$$

- Prawo przemienności: Jeśli liczby $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ uporządkujemy w innej kolejności, co oznaczamy $a_{i_m}, a_{i_{m+1}}, a_{i_{m+2}}, \dots, a_{i_n}$, to

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_{i_j}.$$

- Przesunięcie indeksu: Dowolny symbol (z wyjątkiem m i n) może być użyty jako indeks sumowania:

$$\sum_{i=m}^n a_i \stackrel{j:=i-m}{=} \sum_{j=0}^{n-m} a_{j+m}.$$

Dolnym indeksem sumowania jest często liczba 0 lub 1.

•

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i.$$

- Prawo rozdzielności:

$$\sum_{i=m}^n (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i.$$

- Sumy podwójne: Składniki sumy mogą być czasami indeksowane dwoma indeksami np. $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$. Wtedy sumę

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j}$$

nazywamy sumą podwójną.

Obliczamy ją sumując składniki najpierw względem pierwszego indeksu, a następnie względem drugiego:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} := \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Przykład 2.4.

☞ Na wykładzie!

Znak iloczynu ma podobne własności, tylko przyjmujemy, że „pusty” iloczyn ma wartość 1:

$$\prod_{k=m}^n a_k = 1 \quad \text{dla } m > n.$$

Przykładem zastosowania znaku iloczynu niech będzie następująca definicja.

Definicja 2.5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczbę

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

nazywamy *silnią* liczby naturalnej n .

Uwaga 2.6.

- ❶ Wartość $n!$ pozwala określić liczbę możliwych permutacji (uporządkowań) zbioru n -elementowego.
- ❷ Prawdziwe jest następujące równanie funkcyjne

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

dla wszystkich $n > 0$.

- ❸ *Silnią podwójną* liczby naturalnej n określa się iloczyn kolejnych liczb naturalnych z krokiem 2, przykładowo

$$(2n+1)!! := \prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$$

oznacza iloczyn kolejnych nieparzystych liczb naturalnych.

Zachodzi wtedy

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

- ❹ Silnia rośnie bardzo szybko wraz ze wzrastającym n . Definicja silni nie nadaje się do szybkiego wyznaczania jej wartości dla dużych liczb, dlatego w tym celu najczęściej używa się przybliżonego wzoru *Stirlinga*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \gg 1,$$

gdzie e oznacza liczbę Eulera.

Kolejne przykłady znaku iloczynu i sumy można zobaczyć w rozdziale 3.1 (definicja potęgi liczby naturalnej) i w przykładzie 9.3 (suma n wyrazów ciągu geometrycznego).

2.1.2 $\mathbb{R}$ jako ciało uporządkowane

W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określona jest *relacja mniejszości* $<$, przy czym dla każdych dwóch liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z następujących trzech zależności:

$$x < y \quad \text{lub} \quad x = y \quad \text{lub} \quad y < x.$$

Relację $x < y$ nazywamy *nierównością* i mówimy, że x jest *mniejsze* od y lub y jest *większe* od x .

Czasami jest wygodniej zamiast relacji mniejszości rozważać relację *mniejszości nieostrej* (*niewiększości*):

$$x \leq y \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x < y \quad \text{lub} \quad x = y.$$

Piszemy również $y \geq x$ zamiast $x \leq y$ i mówimy, że x jest *niewiększe* od y lub y jest *niemniejsze* od x .

Uwaga Na wykładzie ze *Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości* będzie można dowiedzieć się więcej o relacjach porządku.

Wymienimy teraz najważniejsze własności relacji mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych.

Własności 2.7. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Przechodność:

$$x < y \quad \text{i} \quad y < z \quad \implies \quad x < z$$

- Monotoniczność dodawania:

$$x < y \quad \implies \quad x + a < y + a \quad \text{dla wszystkich } a \in \mathbb{R}$$

- Monotoniczność mnożenia:

$$x < y \quad \implies \quad a \cdot x < a \cdot y \quad \text{dla wszystkich } a > 0$$

Ciało wraz z relacją mniejszości spełniającą powyższe warunki nazywamy *ciałem uporządkowanym*. Zbiór liczb wymiernych i zbiór rzeczywistych z dodawaniem, mnożeniem i relacją mniejszości są ciałami uporządkowanymi.

Z własności 2.1 i 2.7 możemy uzyskać inne proste własności dotyczące dodawania, mnożenia i relacji mniejszości, które są nam wszystkim ogólnie znane.

Wprowadźmy teraz kolejne oznaczenia, które ułatwią nam zapisywanie definicji i twierdzeń, a także ich dowodów.

Definicja 2.8.

- Zbiór $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ nazywamy *zbiorem liczb dodatnich*.
- Zbiór $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ nazywamy *zbiorem liczb ujemnych*.
- Zbiór $\mathbb{R}_+^0 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ nazywamy *zbiorem liczb nieujemnych*.
- Zbiór $\mathbb{R}_-^0 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ nazywamy *zbiorem liczb niedodatnich*.

2.2 Kresy zbiorów liczb rzeczywistych

Pełny opis zbioru liczb rzeczywistych uzyskamy dodając do warunków 2.1 i 2.7 tzw. aksjomat ciągłości. Sformułowanie go poprzedzimy wprowadzeniem pomocniczych, ale ważnych dla nas pojęć.

Definicja 2.9. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Liczbę $a_0 \in A$, taką że dla każdego $a \in A$ spełniona jest nierówność $a \leq a_0$ nazywamy *maksimum* lub *elementem największym* zbioru A i oznaczamy $\max A$.
- Liczbę $a_0 \in A$, taką że dla każdego $a \in A$ spełniona jest nierówność $a \geq a_0$ nazywamy *minimum* lub *elementem najmniejszym* zbioru A i oznaczamy $\min A$.

Łatwo pokazać, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \quad \text{oraz} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

Maksimum i minimum zbioru, jeśli istnieją, to są wyznaczone **jednoznacznie**.

Jeśli zbiór nie ma elementu najmniejszego i/lub największego, to ich rolę w pewnym sensie mogą przejąć tzw. *kresy*.

Definicja 2.10. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Zbiór A nazywamy *ograniczonym z góry*, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leq M$. Każdą taką liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A .
W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest *nieograniczony z góry*.
- Zbiór A nazywamy *ograniczonym z dołu*, jeśli istnieje taka liczba $m \in \mathbb{R}$, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \geq m$. Każdą taką liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym* zbioru A .
W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest *nieograniczony z dołu*.
- Zbiór A nazywamy *ograniczonym*, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu. W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest *nieograniczony*.

W skrócie, zbiór jest ograniczony z góry (odpowiednio: z dołu), jeśli jego elementy są nie większe (odpowiednio: nie mniejsze) od pewnej ustalonej liczby.

Definicja 2.11. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Liczbę $M \in \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:
 - dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leq M$,
 - dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $a \in A$, że $a > M - \varepsilon$
 nazywamy *kresem górnym (supremum)* zbioru A i oznaczamy $\sup A$.
- Liczbę $m \in \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:
 - dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \geq m$,
 - dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $a \in A$, że $a < m + \varepsilon$
 nazywamy *kresem dolnym (infimum)* zbioru A i oznaczamy $\inf A$.

Najmniejsze z ograniczeń górnych zbioru A jest więc jego kresem górnym, a największe z ograniczeń dolnych jest jego kresem dolnym. Jeżeli zbiór A jest ograniczony z góry, to zbiór jego ograniczeń górnych jest niepusty. Zauważmy jednak, że nie jest sprawą oczywistą, czy zbiór ten ma element najmniejszy. To właśnie gwarantuje nam **Aksjomat ciągłości**.

Aksjomat ciągłości:

Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony z góry, to istnieje najmniejsza liczba ograniczająca go z góry.

Z ciągłości zbioru liczb rzeczywistych (por. wykład *Wstęp do Logiki i Teorii Mnogości*) wynika, że *każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny* oraz *każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny* (wystarczy rozważyć zbiór $-A$ zdefiniowany w poniższym zadaniu 5). Jest to podstawowa własność odróżniająca zbiór liczb rzeczywistych od zbioru liczb wymiernych. Rozważmy przykładowo zbiór

$$A := \{w \in \mathbb{Q} : w > 0 \wedge w^2 > 2\}.$$

Ćwiczenie: Nietrudno pokazać, że zbiór ten jest ograniczony z dołu (np. przez 0), ale zbiór jego ograniczeń dolnych nie posiada elementu największego.

Zadanie:

❶ Sprawdzić, że $\inf \left\{ \frac{1}{x} : x > 0 \right\} = 0$.

❷ Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

$$A = \left\{ (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$B = \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0, p < 2q \right\},$$

$$D = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{3}}{m} : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$E = \left\{ \frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F = \left\{ \frac{x}{|x|+1} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

❸ Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli $A \subseteq B$, to

$$\inf B \leq \inf A \quad \text{oraz} \quad \sup A \leq \sup B.$$

❹ Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy zbiory $A+B$ i λA w następujący sposób

$$A+B := \{x+y : x \in A \text{ i } y \in B\} \quad \text{oraz} \quad \lambda A := \{\lambda x : x \in A\}.$$

Wykazać, że jeśli zbiory A i B są niepuste i ograniczone z góry oraz $\lambda \geq 0$, to zbiory $A+B$ i λA też są ograniczone z góry i

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad \text{oraz} \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A.$$

❺ Niech zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry (z dołu). Wykazać, że zbiór

$$-A := \{x : -x \in A\}$$

jest ograniczony z dołu (z góry) oraz

$$\inf(-A) = -\sup A \quad \text{lub odpowiednio} \quad \sup(-A) = -\inf A.$$

❻ Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Korzystając z aksjomatu ciągłości sprawdzić, że zbiór $\{a \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nieograniczony.

Rozwiązania: 1) samodzielnie, 2) zbiór zadań np. J.Banaś, S. Wędrychowicz „Zbiór Zadań z Analizy Matematycznej”, 3) konsultacje u Prowadzących ćwiczenia!

Z definicji maksimum i minimum zbioru dostajemy natychmiast następujący warunek:

- Jeśli w zbiorze A jest element największy, to zbiór ma kres górny i $\sup A = \max A$.
- Jeśli w zbiorze A jest element najmniejszy, to zbiór ma kres dolny i $\inf A = \min A$.

Aksjomat ciągłości można sformułować także w inny sposób.

Twierdzenie 2.12. Jeżeli A i B są niepustymi podzbiórmi zbioru liczb rzeczywistych spełniającymi warunki:

- $A \cup B = \mathbb{R}$ i $A \cap B = \emptyset$,
- $(x \in A \text{ i } y \in B) \implies x < y$,

to albo zbiór A ma element największy albo zbiór B ma element najmniejszy.

 **Dowód** – ćwiczenie!

Powyższe twierdzenie oznacza, że zbiór liczb rzeczywistych jest uporządkowany w sposób ciągły, albo inaczej mówiąc (jak to mówiliśmy wcześniej): w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma luk!

2.3 Zbiór $\overline{\mathbb{R}}$

Zakładamy, że istnieją elementy $-\infty$ i $+\infty$ (nie liczby!) nazywane odpowiednio *minus nieskończonością* i *plus nieskończonością*, przy czym prawdziwa jest nierówność

$$-\infty < x < +\infty$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zbiór

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

nazywamy *rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych*.

Często piszemy ∞ zamiast $+\infty$.

Własności 2.13. Obliczenia w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ wykonujemy według następujących reguł, gdzie $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \infty + a &= a + \infty = \infty, \\ \infty + \infty &= \infty, \\ -\infty + (-\infty) &= -\infty, \\ \infty \cdot a &= a \cdot \infty = \infty \quad \text{dla } a > 0, \\ \infty \cdot a &= a \cdot \infty = -\infty \quad \text{dla } a < 0, \\ \infty \cdot \infty &= (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \\ \infty \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot \infty = -\infty, \\ \frac{a}{\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe reguły nie oznaczają wprowadzenia w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ działań dodawania i mnożenia. Na przykład nie określamy następujących wyrażeń:

$$[0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right], \quad \left[\frac{0}{0} \right].$$

Takie symbole będziemy nazywać **nieoznaczonymi**.

W rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych można wprowadzić relację $\leq$ w analogiczny sposób jak w $\mathbb{R}$, a także zdefiniować kresy.

Wtedy przyjmujemy, że

- $\sup A = \infty$, jeśli A nie jest zbiorem ograniczonym z góry;
- $\inf A = -\infty$, jeśli A nie jest zbiorem ograniczonym z dołu.

$$\inf \emptyset = ? \quad \text{ i } \quad \sup \emptyset = ?$$

2.4 Wartość bezwzględna i znak liczby rzeczywistej

Definicja 2.14. *Wartością bezwzględną* liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę nieujemną $|x|$ określoną następująco

$$|x| := \begin{cases} x & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Przykład 2.15.

$$|0| = 0, \quad |4| = 4, \quad \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{jeśli } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{jeśli } x < 1. \end{cases}$$

Własności 2.16. Dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi:

-

$$|x| \geq 0 \quad \text{i} \quad (|x| = 0 \iff x = 0)$$

-

$$|-x| = |x|$$

-

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

-

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{jeśli } y \neq 0$$

- nierówność trójkąta:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

-

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Uwaga 2.17. Wartość bezwzględna $|x|$ liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ odpowiada *odległości* tej liczby od punktu zero na osi liczbowej.

Ogólnie

$$|x - y| \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}$$

odpowiada odległości liczb x i y .

Tę interpretację można też wykorzystać do rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Łatwo można wykazać, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \quad \text{oraz} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

Definicja 2.18. *Znakiem* liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $\operatorname{sgn} x$ określoną następująco

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x > 0, \\ 0, & \text{jeśli } x = 0, \\ -1, & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$.

3 Działania algebraiczne

3.1 Potęga o wykładniku naturalnym

Jeśli liczbę rzeczywistą a pomnożymy przez siebie n razy, to otrzymany iloczyn $\prod_{i=1}^n a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$ możemy oznaczyć nowym symbolem.

Definicja 3.1. Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. *Potęga o podstawie a i wykładniku n* nazywamy liczbę a^n określoną następująco:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1, \\ a^n &:= a^{n-1} \cdot a \quad \text{dla } n > 0. \end{aligned}$$

Dodatkowo, dla $a = 0$ przyjmujemy, że $a^n := 0$ dla $n > 0$.

Własności 3.2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas zachodzą następujące związki:

P1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n},$

P2: $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{dla } m > n, \\ 1 & \text{dla } m = n, \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{dla } m < n \end{cases} \quad \text{dla } a \neq 0,$

P3: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

P4: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P5: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{dla } b \neq 0$

Uwaga na różnice:

- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16, \quad \text{ale} \quad -2^4 = -(2)^4 = -16$
- $ab^n = a \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ razy}}, \quad \text{ale} \quad (ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ razy}}.$

Uwaga Ważniejsze potęgi:

- Potęga o podstawie 2:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \dots \quad 2^{10} = 1024.$$

- Potęga o podstawie 10:

$$10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \quad 10^4 = 10\,000, \quad \dots \quad 10^9 = 1\,000\,000\,000.$$

Ogólnie

$$10^n = \underbrace{1\,000 \dots 0}_{n \text{ zer}}.$$

Potęga o podstawie 10 używamy do przejrzystego zapisywania dużych liczb:

$$637\,100\,000\,000 = 6,371 \cdot 100\,000\,000\,000 = 6,371 \cdot 10^{11}.$$

3.1.1 Przekształcenia algebraiczne

Niech $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ będą dowolnymi liczbami oraz niech $n \in \mathbb{N}$ będzie większe od 1. Wtedy prawdziwy jest wzór

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

W szczególności

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b) \cdot (a + b), \\ a^3 - b^3 &= (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2), \\ a^4 - b^4 &= (a - b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \end{aligned}$$

Niech teraz $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą większą od 2. Wtedy prawdziwy jest wzór

$$a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a + b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k.$$

W szczególności

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2), \\ a^5 + b^5 &= (a + b) \cdot (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4). \end{aligned}$$

3.1.2 Dwumian Newtona

Przedstawimy teraz często wykorzystywany wzór na potęgę dwumianu $(a + b)^n$, gdzie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Znałe i bardzo łatwe do sprawdzenia są następujące tożsamości

$$(a + b)^1 = a + b, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Wprowadzenie analogicznych wzorów dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wymaga pewnego przygotowania.

Definicja 3.3. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$. Liczby

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} \quad \text{dla } k \geq 1$$

nazywamy *symbolami Newtona*.

Symbol Newtona ma następującą interpretację kombinatoryczną. Liczba wszystkich k -elementowych podzbiorów (kombinacji) zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa $\binom{n}{k}$.

Przykład 3.4. 📺 Na wykładzie!

Bezpośrednio z definicji możemy wykazać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5. Dla $n, k \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące równości:

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{i} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{jeśli } 0 < k < n;$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{n}{k} = 0, \quad \text{jeśli } k > n;$$

$$\textcircled{3} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad \text{jeśli } 1 \leq k \leq n;$$

$$\textcircled{4} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{jeśli } 1 \leq k \leq n.$$

Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej można wykazać następujące dwa fakty.

Twierdzenie 3.6. Dla dowolnych liczb naturalnych n i k liczba $\binom{n}{k}$ jest naturalna.

Dowód:  na wykładzie!

Twierdzenie 3.7. [Wzór dwumianowy Newtona]

Niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera oraz niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wtedy prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 \cdot b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k} \cdot b^k.$$

Dowód:  na zajęciach ze *Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości*!

W szczególności

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Współczynniki występujące w powyższym wzorze można *rekurencyjnie* wyliczyć korzystając z tzw. trójkąta Pascala (B. Pascal, 1623–1662), który tworzy się w oparciu o trzeci wzór z twierdzenia 3.5.

$n=0$								1
$n=1$							1	1
$n=2$						1	2	1
$n=3$				1		3	3	1
$n=4$			1	4		6	4	1
$n=5$		1	5	10		10	5	1
$n=6$	1	6	15	20		15	6	1

Liczby n -tego wiersza trójkąta Pascala są kolejnymi współczynnikami rozwinięcia dwumianu $(a+b)^n$. Łatwo zauważyć, że każdy element n -tego wiersza jest sumą dwu znajdujących się bezpośrednio nad nim elementów $(n-1)$ -szego wiersza.

Zadanie: Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona

① obliczyć sumę $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$;

② wyznaczyć współczynnik stojący przy a^5 w rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $(a^3 + \frac{1}{a^2})^{15}$.

3.2 Potęga o wykładniku całkowitym

Żmudne rozważanie przypadków w przypadku dzielenia potęg o tej samej podstawie (por. **P2**, Własności 3.2) zachęca do rozszerzenia definicji potęgi do wykładników całkowitych i niedodatnich.

Definicja 3.8. Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$. *Potęga o podstawie a i wykładniku n* nazywamy liczbę a^n określoną następująco:

$$a^n := \begin{cases} a^n & \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{dla } n = 0 \text{ i } a \neq 0, \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{dla } -n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ i } a \neq 0. \end{cases}$$

Potęga o wykładniku całkowitym jest poprawnie określona, gdyż dla liczb $n \in \mathbb{Z}$ mamy $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ albo $n = 0$ albo $-n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Przy tej definicji prawo potęgowania (**P2**) można zapisać w jednolity sposób:

P2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $m, n \in \mathbb{Z}$

Oczywiście, wszystkie pozostałe prawa zachowują swoją ważność.

Uwaga Potęg o podstawie 10 i wykładniku ujemnym:

$$10^{-1} = 0,1, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 10^{-3} = 0,001, \quad 10^{-4} = 0,0001, \quad \dots,$$

ogólnie

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{1\,000\dots 0}_{n \text{ zer}}} = \underbrace{0,00\dots 01}_{n \text{ zer}},$$

używamy do przejrzystego zapisywania małych liczb:

$$6,3 \cdot 10^{-4} = 6,3 \cdot 0,0001 = 0,00063.$$

3.3 Pierwiastek

Twierdzenie 3.9. [o istnieniu pierwiastków]

Dla każdego $a \in \mathbb{R}_+$ oraz każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje dokładnie jedno $x \in \mathbb{R}_+$ takie, że $x^n = a$.

Definicja 3.10. Niech $a \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$.

Pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby a nazywamy taką liczbę $x \in \mathbb{R}_+$, że $x^n = a$ i oznaczamy ją przez $\sqrt[n]{a}$.

Pierwiastek stopnia 2 nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym* i oznaczamy symbolem $\sqrt{a}$ zamiast $\sqrt[2]{a}$. Dodatkowo przyjmujemy, że $\sqrt[n]{0} = 0$.

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}_+^0$ istnieje dokładnie jeden pierwiastek n -tego stopnia z tej liczby.

Własności 3.11. Niech $a, b \in \mathbb{R}_+$ oraz niech $k, n \in \mathbb{N}$ będą większe od 1. Wówczas zachodzą następujące związki:

R1: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$

R2: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}$

R3: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

R4: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

R5: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Definicję pierwiastka nieparzystego stopnia można rozszerzyć na liczby ujemne.

Definicja 3.12. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą i większą od 2.

Pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby ujemnej a nazywamy liczbę $-\sqrt[n]{-a}$ i oznaczamy ją przez $\sqrt[n]{a}$.

Czyli: $\sqrt[3]{-8} := -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Twierdzenie 3.13. Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$.

Wówczas

- Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- Jeśli n jest liczbą parzystą, to $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

3.4 Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja 3.14. Niech $a \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $m \in \mathbb{Z}$. *Potęga o podstawie a i wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$* nazywamy nieujemne rozwiązanie równania $x^n = a^m$, tzn.

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

W potęgze o dowolnym wykładniku wymiernym podstawa musi być dodatnia, żeby nie powstawały wyrażenia nieokreślone, np. 0^0 , 0^{-1} , $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$.

Uwaga Prawa potęgowania **P1–P2** zachowują swoją ważność także dla potęg o wykładniku wymiernym. Ale wykładniki wymierne można przekształcać tylko przy założeniu, że podstawa potęgi jest dodatnia, bo

$$-8 = (-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = \left((-2)^6\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8 !!$$

Uwaga

- Wyrażenie $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ jest jednoznaczne i zawsze dodatnie. Fałszywa jest zatem „równość”: $\sqrt{4} = \pm 2$!
- Natomiast równanie $x^2 = 4$ ma dwa rozwiązania: 2 i -2 .

3.5 Potęga o wykładniku rzeczywistym (informacyjnie)

Możliwe jest następne rozszerzenie pojęcia potęgi dla dowolnych wykładników rzeczywistych (z pomocą tzw. „zagęszczania przedziałów”). Dla przykładu liczba $3^{\sqrt{2}}$ jest położona na osi liczbowej między liczbami $3^{1,41}$ a $3^{1,42}$, względnie między liczbami $3^{1,414}$ a $3^{1,415}$ lub $3^{1,4142}$ a $3^{1,4143}$ itd. Oznacza to, że potęga o wykładniku rzeczywistym daje się dowolnie dokładnie ograniczyć przez potęgę o wykładniku wymiernym:

$$\begin{aligned} 4,70696500 = 3^{1,41} &< 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42} = 4,75896139 \\ 4,72769503 = 3^{1,414} &< 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415} = 4,73289179 \\ 4,72873393 = 3^{1,4142} &< 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,4143} = 4,72925346 \\ 4,72878588 = 3^{1,41421} &< 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,41422} = 4,72883783 \\ 4,72880147 = 3^{1,414213} &< 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,414214} = 4,72880666 \end{aligned}$$

4 Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej

Funkcja jest jednym z najważniejszych pojęć analizy matematycznej. Podobnie jak pojęcie zbieżności nie była ona znana matematykom świata antycznego. Słowo „funkcja” zostało wprowadzone przez J. Bernoulli’ego (1667-1748) w roku 1718. L. Euler (1707-1783) używał (jak to dawniej było w zwyczaju) łacińskiego sformułowania „functio continua”. Miał przy tym na myśli „analityczne wyrażenie nie wymagające dalszych objaśnień”. Zmieniło się to za sprawą L. Dirichleta (1805-1859), który wprowadził nowoczesne pojęcie odwzorowania i funkcji.

W tym rozdziale zajmiemy się podstawowymi własnościami funkcji określonych na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych i o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Przypomnimy, znane ze szkoły, pojęcie funkcji oraz takie terminy jak dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji na danym zbiorze, monotoniczność, parzystość czy okresowość funkcji.

Definicja 4.1. Niech X i Y będą niepustymi zbiorami. Przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$ nazywamy *funkcją* ze zbioru X w zbiór Y .

Oznaczenie:

$$f: X \rightarrow Y, \quad \text{wzg.} \quad f: \begin{cases} X & \longrightarrow Y \\ x & \longmapsto y. \end{cases}$$

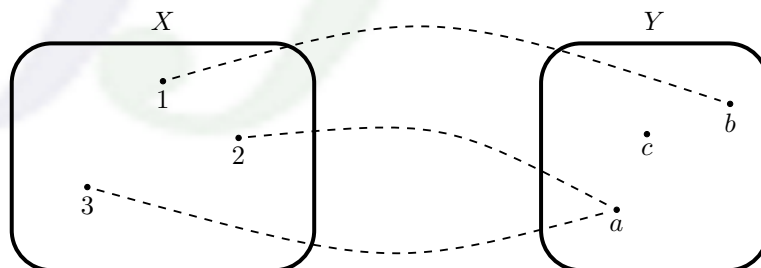
- Element x nazywamy *argumentem* funkcji f .
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f i oznaczamy najczęściej symbolem D lub dokładniej symbolem D_f .
- Zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji f .
- Jeśli $x \in X$, to jedyny przyporządkowany mu element $y \in Y$ nazywany jest *wartością* funkcji f w punkcie x i piszemy $y = f(x)$.
- Zbiór $\{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$ nazywany jest *zbiorem wartości* funkcji f lub *obrazem* f i oznaczany jest symbolem W_f lub $f(X)$.
- Zbiór $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ nazywamy *wykresem* funkcji f .

Uwaga 4.2.

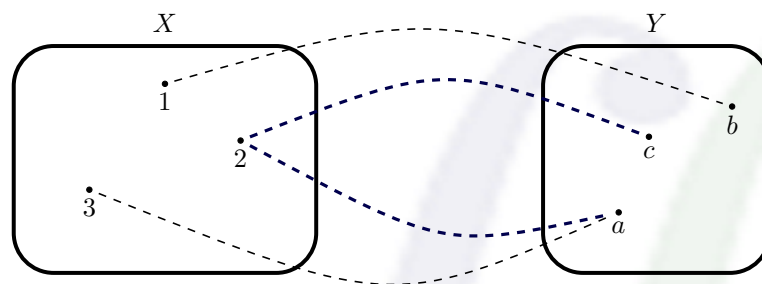
- Jeżeli X i Y są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej*.
- Istotną częścią definicji funkcji jest podanie jej dziedziny, a nie tylko wzoru określającego przyporządkowanie argumentowi pewnej wartości. Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zwyczajowo jako dziedzinę bierzemy zbiór wszystkich tych elementów, dla których wzór ma sens, lub w zastosowaniach ograniczamy się do „sensownych” dziedzin, np. czas $t \geq 0$.

Przykład 4.3.

Funkcja $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$:



To nie jest funkcja:



Wprowadzone poniżej pojęcia obrazu i przeciwobrazu zbioru względem danej funkcji oraz ich własności zostaną omówione dokładnie na wykładzie ze *Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości*.

Definicja 4.4. Niech będą dane zbiory X i Y oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$.

- a) **Obrazem** zbioru $M \subseteq X$ względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f(M) := \{f(x) : x \in M\} = \{y \in Y : \exists_{x \in M} f(x) = y\} \subseteq Y.$$

- b) **Przeciwobrazem** zbioru $N \subseteq Y$ względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\} \subseteq X.$$

Jeśli $N = \{y\}$ dla pewnego $y \in Y$, to używamy następującego oznaczenia

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Przykład 4.5. Rozważmy funkcję z przykładu 4.3, wtedy

$$\textcircled{1} f(\{3\}) = \{a\}, \quad f(\{1, 2\}) = \{a, b\}, \quad f(\{1, 2, 3\}) = \{a, b\};$$

$$\textcircled{2} f^{-1}(\{a\}) = \{2, 3\}, \quad f^{-1}(\{b\}) = \{1\}, \quad f^{-1}(\{c\}) = \emptyset.$$

📖 Dalsze przykłady tylko na wykładzie!

4.1 Bijekcja

Definicja 4.6. Niech będą dane niepuste zbiory X i Y . Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy

- a) **surjekcją** (lub **funkcją „na” zbiór**), jeśli

- dla każdego $y \in Y$ do zbioru $f^{-1}(y)$ należy przynajmniej jeden element, tzn.:
- $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} f(x) = y$, tzn.:
- $f(X) = Y$, czyli zbiór wartości funkcji f jest równy przeciwdziedzinnie Y .

- b) **injekcją** (lub **funkcją różnowartościową**), jeśli

- dla każdego $y \in Y$ do zbioru $f^{-1}(y)$ należy co najwyżej jeden element, tzn.:
- $\forall_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$, tzn.:
- $\forall_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$.

c) **bijekcją** (lub **funkcją wzajemnie jednoznaczłą**), jeśli f jest injekcją i surjekcją, tzn.:

- dla każdego $y \in Y$ do zbioru $f^{-1}(y)$ należy dokładnie jeden element, tzn.:
- $\forall y \in Y \exists! x \in X \quad f(x) = y$.

Wyjaśnijmy, co oznacza właściwie powyższa definicja.

Jeżeli funkcja f jest surjekcją, to każdy element y z przeciwdziedziny Y jest obrazem pewnego elementu $x \in X$. Przykładowo, funkcja kwadratowa

$$f: \mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

nie jest surjekcją, ponieważ żadna liczba z dziedziny nie jest przekształcana na liczbę ujemną -2 .

Łatwo jednak zauważyć, że jeśli zacieśnimy przeciwdziedzinę do zbioru wartości funkcji f (zbiór liczb nieujemnych), czyli rozważamy funkcję

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2 \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

to jest ona surjekcją.

Jeżeli funkcja f jest injekcją, to każdy element y z przeciwdziedziny Y jest obrazem co najwyżej jednego elementu $x \in X$. Przykładowo, rozważana wyżej funkcja

$$f: \mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

nie jest też injekcją, ponieważ dwie liczby z dziedziny są przekształcane na liczbę 4, a mianowicie

$$-2 \mapsto 4 \quad \text{ i } \quad 2 \mapsto 4.$$

Ponownie łatwo jednak zauważyć, że jeśli tym razem zacieśnimy dziedzinę do zbioru liczb nieujemnych, czyli rozważamy funkcję

$$\hat{f}: \langle 0, +\infty \rangle \ni x \longmapsto x^2 \in \mathbb{R},$$

to jest ona injekcją.

Podsumowując, jeżeli zacieśnimy jednocześnie dziedzinę i przeciwdziedzinę

$$\bar{f}: \langle 0, +\infty \rangle \ni x \longmapsto x^2 \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

to otrzymamy funkcję, która jest bijekcją.

☞ Pamiętajmy, że zmieniając dziedzinę i/lub przeciwdziedzinę (przy niezmiennym wzorze) otrzymujemy różne funkcje, dlatego w powyższym wyszczególnieniu używaliśmy różnych oznaczeń!

☞ Standardowo, zacieśnienie funkcji f do podzbioru $A \subseteq D_f$ oznaczamy symbolem $f|_A$.

Uwaga 4.7. [Test prostej poziomej]

Jeżeli znany nam jest wykres funkcji f , to możemy bardzo łatwo rozpoznać, czy f ma zdefiniowane powyżej własności.

- Funkcja f jest **surjekcją** wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta pozioma o równaniu $y = b$, gdzie b jest dowolnym elementem przeciwdziedziny Y , przecina wykres funkcji f w **przynajmniej jednym** punkcie.
- Funkcja f jest **injekcją** wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta pozioma o równaniu $y = b$, gdzie b jest dowolnym elementem przeciwdziedziny Y , przecina wykres funkcji f w **co najwyżej jednym** punkcie.
- Funkcja f jest **bijekcją** wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta pozioma o równaniu $y = b$, gdzie b jest dowolnym elementem przeciwdziedziny Y , przecina wykres funkcji f w **dokładnie jednym** punkcie.

Przykład 4.8.

☞ Aplet Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/epyfm4c8>

Uwaga

Różnowartościowość funkcji wykorzystujemy rozwiązując równania, np. równania wykładnicze lub logarytmiczne.

Wprowadzimy (lub przypomnimy) teraz definicję funkcji odwrotnej.

Definicja 4.9. [Funkcje odwracalne]

Mówimy, że funkcja f jest *odwracalna*, jeśli istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi

$$g(y) = x \iff f(x) = y.$$

W takim przypadku funkcję g nazywamy *odwrotną* do funkcji f i oznaczamy symbolem f^{-1} .

Przykład 4.10.

Apłekt Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/pb5ra5ee>

Wykres funkcji odwrotnej do funkcji f otrzymujemy z wykresu tej funkcji odbijając go symetrycznie względem prostej o równaniu $y = x$. Wzór określający funkcję odwrotną otrzymujemy rozwiązując (jeżeli jest to możliwe) równanie $y = f(x)$ względem zmiennej x . W tym wzorze zamieniamy (ze względów tradycyjnych) zmienne y i x i otrzymujemy wzór określający funkcję odwrotną $y = f^{-1}(x)$.

Wprost z definicji funkcji odwracalnej mamy

Twierdzenie 4.11.

Funkcja jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

4.2 Działania na funkcjach

Działania arytmetyczne ze zbioru liczb rzeczywistych mogą zostać przeniesione na zbiór funkcji.

Definicja 4.12. Niech $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami rzeczywistymi.

- a) *Iloczynem* funkcji f przez liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcję

$$\lambda \cdot f: \begin{cases} D_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \lambda \cdot f(x) \end{cases} \quad (\text{mnożenie w } \mathbb{R}),$$

- b) *Sumą (różnicą)* funkcji f i g nazywamy funkcję

$$f \pm g: \begin{cases} D_f \cap D_g & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \pm g(x) \end{cases} \quad (\text{dodawanie w } \mathbb{R}),$$

- c) *Iloczynem* funkcji f i g nazywamy funkcję

$$f \cdot g: \begin{cases} D_f \cap D_g & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases} \quad (\text{mnożenie w } \mathbb{R}),$$

- d) *Ilorazem* funkcji f i g nazywamy funkcję

$$\frac{f}{g}: \begin{cases} (D_f \cap D_g) \setminus \{g(x) = 0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \quad (\text{dzielenie w } \mathbb{R}),$$

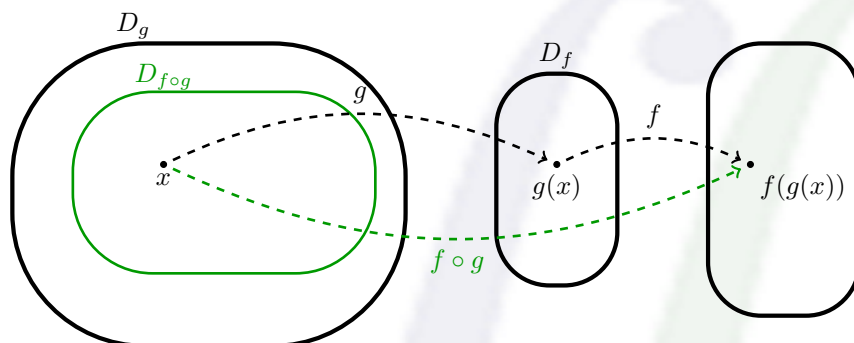
4.3 Złożenie funkcji

Następnym, bardzo ważnym działaniem na funkcjach jest ich złożenie.

Definicja 4.13. Niech $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami rzeczywistymi. *Złożeniem* funkcji g i f nazywamy funkcję

$$f \circ g: \begin{cases} \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(g(x)). \end{cases}$$

Dziedziną funkcji $f \circ g$ jest zbiór $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$. Oznacza to, że złożenie $f \circ g$ jest określone tylko dla tych x z dziedziny funkcji g , dla których $g(x)$ należy do dziedziny funkcji f .



Analogicznie można określić złożenie większej liczby funkcji. Działanie składania funkcji jest łączne, tzn.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

natomiast nie jest przemienne, co można zobaczyć na przykładach.

Przykład 4.14.

📖 Na wykładzie!

Wprost z definicji funkcji odwracalnej mamy

Twierdzenie 4.15. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że $g \circ f = id_X$ oraz $f \circ g = id_Y$.

Funkcję $id_X: X \ni x \mapsto x \in X$ nazywamy *identycznością* zbioru X , a funkcję $id_Y: Y \ni y \mapsto y \in Y$ *identycznością* zbioru Y (zob. Przykład 5.18).

4.4 Funkcje monotoniczne

Definicja 4.16. Niech $f: \mathbb{R} \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą oraz niech $I \subseteq D_f$ będzie przedziałem. Funkcję f nazywamy

- a) *rosnącą* na I wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

- b) *niemalejącą (słabo rosnącą)* na I wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- c) *malejącą* na I wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

- d) *nierosnącą (słabo malejącą)* na I wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $x_1, x_2 \in I$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

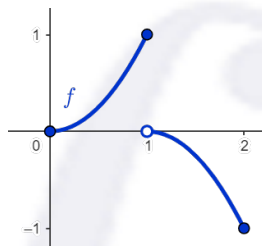
Funkcje rosnące, nierosnące, malejące oraz niemalejące będziemy nazywać *funkcjami monotonicznymi*.

Przykład 4.17.

📖 Na wykładzie!

Wprost z definicji dostajemy, że każda silnie monotoniczna (rosnąca lub malejąca) funkcja jest injekcją, ale nie na odwrót. Przykładowo funkcja $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [0, 1], \\ -(x-1)^2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$



jest różnowartościowa, ale nie jest monotoniczna na przedziale $[0, 2]$.

Uwaga 4.18.

- Każda silnie monotoniczna (rosnąca lub malejąca) funkcja jest injekcją (jest różnowartościowa).
- Każda silnie monotoniczna (rosnąca lub malejąca) funkcja jest bijekcją na swój zbiór wartości, a zatem jest odwracalna.

Łatwo można pokazać następujący fakt:

Twierdzenie 4.19. Jeżeli funkcja f jest rosnąca (malejąca), to funkcja odwrotna f^{-1} ma tę samą własność.

Uwaga

Monotoniczność funkcji wykorzystujemy rozwiązując nierówności, np. nierówności wykładnicze lub logarytmiczne.

4.5 Funkcje parzyste i nieparzyste

Definicja 4.20.

- a) Funkcję $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **parzystą**, jeżeli dla wszystkich $x \in D_f$ zachodzi

$$-x \in D_f \quad \text{i} \quad f(-x) = f(x).$$

- b) Funkcję $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **nieparzystą**, jeżeli dla wszystkich $x \in D_f$ zachodzi:

$$-x \in D_f \quad \text{i} \quad f(-x) = -f(x).$$

Uwaga 4.21.

- Funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu Γ_f .
- Funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieparzysta, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu Γ_f .

Przykład 4.22.

📖 Na wykładzie!

Łatwo można udowodnić następujące

Twierdzenie 4.23. Każda funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.

Zauważmy bowiem, że każdą funkcję f można zapisać w następujący sposób

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

przy czym pierwszy składnik określa część parzystą funkcji, a drugi składnik jest jej częścią nieparzystą.

4.6 Funkcje okresowe

Definicja 4.24. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Liczbę $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nazywamy *okresem* funkcji f , jeżeli dla wszystkich $x \in D_f$ zachodzi:

$$x \pm p \in D_f \quad \text{i} \quad f(x \pm p) = f(x).$$

Funkcję f nazywamy *okresową*, jeżeli istnieje liczba będąca jej okresem. Najmniejszy dodatni okres funkcji nazywamy *okresem podstawowym*.

Przykład 4.25.

📖 Na wykładzie!

Obrazowo mówiąc, funkcja jest okresowa, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = (\pm p, 0)$ nałoży się na siebie.

Uwaga 4.26. Istnieją funkcje okresowe, które nie mają okresu podstawowego. Przykładem takiej funkcji jest funkcja Dirichleta określona następująco

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4.7 Funkcje ograniczone

Pojęcia ograniczoności i kresów podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych omówione w podrozdziale 2.2 przenieśmy teraz w naturalny sposób na funkcje.

Definicja 4.27. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą oraz niech zbiór $I \subseteq D_f$ będzie przedziałem. Mówimy, że

- a) funkcja f jest *ograniczona z dołu* na przedziale I , jeśli obraz $f(I)$ jest ograniczony z dołu, tzn.

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad f(x) \geq m;$$

- b) funkcja f jest *ograniczona z góry* na przedziale I , jeśli obraz $f(I)$ jest ograniczony z góry, tzn.

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad f(x) \leq M;$$

- c) funkcja f jest *ograniczona* na przedziale I , jeśli obraz $f(I)$ jest ograniczony, tzn.

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Funkcję, która nie jest ograniczona, nazywamy *nieograniczoną*.

Obrazowo mówiąc, funkcja jest ograniczona z dołu, gdy jej wykres leży ponad pewną prostą poziomą, a ograniczona z góry, gdy jej wykres leży pod pewną prostą poziomą. Czyli wykres funkcji ograniczonej leży między dwiema prostymi poziomymi.

Definicja 4.28. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą.

- Kresem górnym* funkcji f nazywamy kres górny obrazu f , czyli $\sup f(D_f)$.
- Kresem dolnym* funkcji f nazywamy kres dolny obrazu f , czyli $\inf f(D_f)$.
- Wartością największą (maksimum globalne/absolutne)* funkcji f nazywamy wartość największą obrazu f , czyli $\max f(D_f)$.
- Wartością najmniejszą (minimum globalne/absolutne)* funkcji f nazywamy wartość najmniejszą obrazu f , czyli $\min f(D_f)$.

Istnieją funkcje, które nie mają najmniejszej i największej wartości. Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Do tego tematu wrócimy jeszcze w ostatniej części wykładu dotyczącego funkcji ciągłych.

5 Funkcje elementarne

Podstawowymi funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne. Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji składania funkcji, nazywamy *funkcjami elementarnymi*.

5.1 Funkcja potęgowa

Definicja 5.1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. *Funkcją potęgową o wykładniku α* nazywamy funkcję określoną wzorem

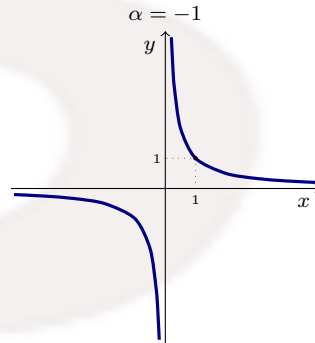
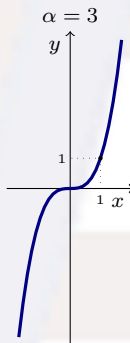
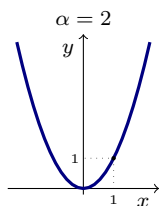
$$f(x) = x^\alpha,$$

przy czym jej dziedzina zależy od liczby α :

$$\begin{array}{ll} x \in \mathbb{R}, & \text{gdy } \alpha \in \mathbb{N}^*, \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{gdy } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*, \\ x \in \mathbb{R}_+^0, & \text{gdy } \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}, \\ x \in \mathbb{R}_+, & \text{gdy } \alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}. \end{array}$$

Funkcja potęgowa jest poprawnie określona (por. definicja potęgi o wykładniku naturalnym, całkowitym i rzeczywistym).

Przykładowe wykresy funkcji potęgowych:



Własności 5.2. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}_+$.

- a) Jeśli $\alpha > 0$, to f jest funkcją rosnącą.
- b) Jeśli $\alpha = 0$, to f jest funkcją stałą.
- c) Jeśli $\alpha < 0$, to f jest funkcją malejącą.

Wniosek 5.3. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ oraz $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}_+$. Wówczas

- a) Funkcja f jest różnowartościowa (injekcją).
- b) Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}_+$.

Szczególnym przypadkiem funkcji potęgowej jest funkcja pierwiastkowa określona poniżej.

Definicja 5.4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. *Funkcją pierwiastkową n -tego stopnia* nazywamy funkcję określoną wzorem

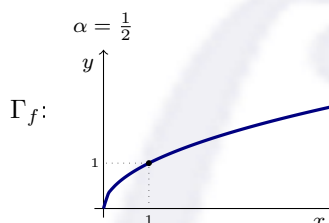
$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

przy czym $x \in \mathbb{R}$, gdy n jest liczbą nieparzystą lub $x \in \mathbb{R}_+^0$, gdy n jest liczbą parzystą.

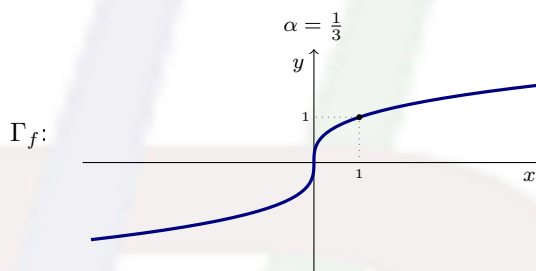
Z definicji pierwiastka liczby rzeczywistej dostajemy, że funkcja pierwiastkowa jest poprawnie określona. W zbiorze $\mathbb{R}_+$ funkcja pierwiastkowa $\sqrt[n]{x}$ pokrywa się z funkcją potęgową $x^{\frac{1}{n}}$.

Przykład 5.5.

$$f: \begin{cases} [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \\ x \longmapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$



$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$



5.2 Funkcje wielomianowe

W trakcie nauki w szkole wielokrotnie wykorzystywaliśmy tzw. wyrażenia algebraiczne. Pozwalały one w sposób ścisły wyrazić związki między różnymi wielkościami matematycznymi lub fizycznymi, przykładowo zapisać wzór na pole czy objętość figur geometrycznych. Zapoznaliśmy się także z regułami przekształceń wyrażeń algebraicznych oraz operacjami na nich.

Wielomiany, o których teraz będziemy mówili, są przykładem wyrażeń algebraicznych.

Niech $a_0, \dots, a_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą wybranymi liczbami rzeczywistymi. Wyrażenie algebraiczne

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$, nazywamy *wielomianem* jednej zmiennej *stopnia* n a liczby $a_0, \dots, a_n$ jego *współczynnikami*. Współczynnik a_n nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu, a współczynnik a_0 *wyrazem wolnym*.

Wielomianem jest również wyrażenie, którego wszystkie współczynniki są zerami. Ten wielomian nazywamy wielomianem zerowym i przyjmujemy, że jego stopień jest równy $-\infty$. Wielomianu zerowego nie należy mylić z wielomianem stopnia zerowego, czyli wyrażeniem a_0 , gdzie $a_0 \neq 0$.

Definicja 5.6. Funkcję postaci

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{cases}$$

gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, nazywamy *funkcją wielomianową* jednej zmiennej *stopnia* n , jeśli $a_n \neq 0$.

W dalszym ciągu, dla prostoty, pojęcia i odpowiadające im oznaczenia: funkcja wielomianowa f i wielomian $f(x)$ będziemy używali wymiennie.

Dziedzina i zbiór wartości

Dziedziną D_f i *przeciwdziedziną* funkcji wielomianowych jest zbiór liczb rzeczywistych. O takich funkcjach mówimy, że są *funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej*.

Trudno natomiast w sposób ogólny opisać zbiór wartości funkcji wielomianowych. Najlepiej robić to w każdym przypadku osobno.

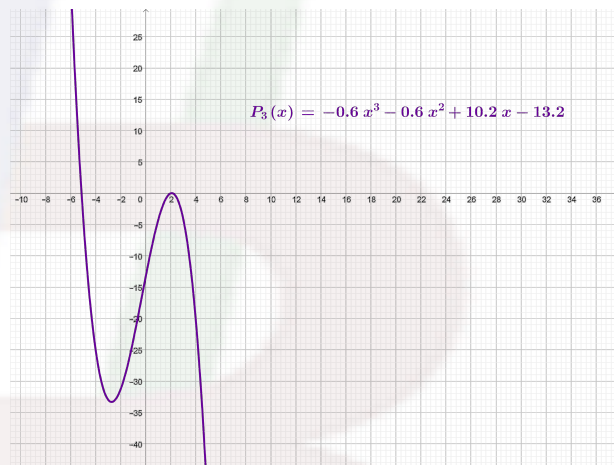
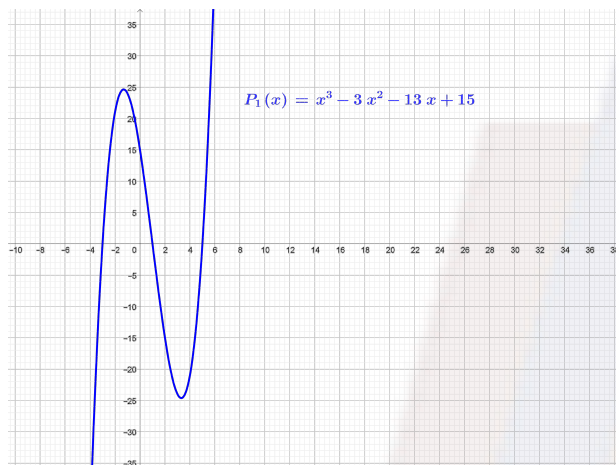
Wykres

Podobnie trudno jest dokładnie opisać krzywe będące wykresami funkcji wielomianowych, są one bardzo zróżnicowane i mają rozmaite kształty.

Łączy je natomiast fakt, że krzywe te można narysować jednym pociągnięciem ołówka. Wynika to z faktu, że funkcje wielomianowe są tzw. *funkcjami ciągłymi* (zob. rozdział 16), a ich dziedziną jest cały zbiór liczb rzeczywistych, czyli *zbiór spójny*.

Poniżej przedstawiono przykładowe wykresy czterech funkcji wielomianowych. Po wprowadzeniu pojęcia granicy funkcji omówimy dokładniej zachowanie funkcji wielomianowych w minus i w plus nieskończoności, a teraz jedynie zapiszmy to, co możemy zaobserwować na poniższych rysunkach.

Niech f będzie wielomianem stopnia n , gdzie n jest liczbą nieparzystą.



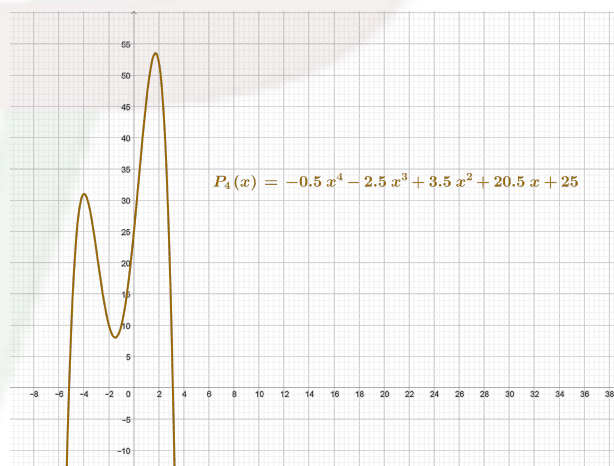
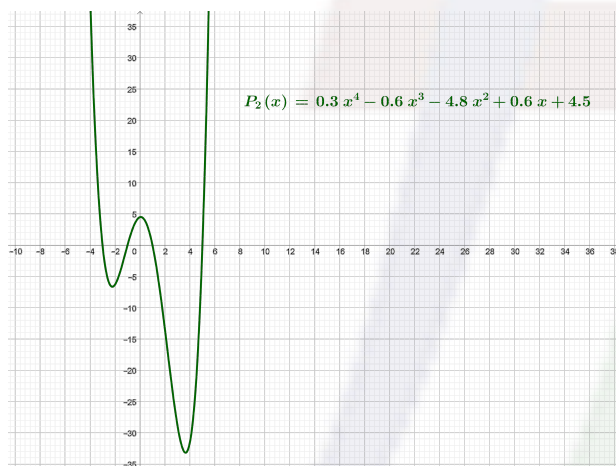
Jeśli $a_n > 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Jeśli $a_n < 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Niech teraz f będzie wielomianem stopnia n , gdzie n jest liczbą parzystą.



Jeśli $a_n > 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Jeśli $a_n < 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Więcej eksperymentów dotyczących zachowania funkcji wielomianowych w nieskończoności można przeprowadzić korzystając z materiałów zawartych w e-kursie lub bezpośrednio korzystając z apletu GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/UTZkaY2g>.

Wniosek 5.8 pozwala ponadto dokładniej określić liczbę punktów wspólnych wykresu funkcji wielomianowych z osią Ox , czyli liczbę miejsc zerowych tych funkcji. Punkt przecięcia wykresu funkcji wielomianowej z osią Oy to oczywiście punkt o współrzędnych $(0, a_0)$, gdzie a_0 jest wyrazem wolnym wielomianu.

Po wprowadzeniu pojęcia pochodnej funkcji nauczymy się dokładnie określać przebieg wykresu funkcji wielomianowej. Na razie wystarczy nam szkic jej wykresu uwzględniający właśnie granice w nieskończoności oraz zachowanie w miejscach zerowych, co omówimy poniżej.

Miejsca zerowe

Liczbę a nazywamy *pierwiastkiem wielomianu*, jeśli wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Natomiast *miejszem zerowym* funkcji wielomianowej nazywamy taki jej argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość zero.

Okazuje się, że te dwa pojęcia możemy utożsamiać, o czym mówi kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 5.7. [Bézouta]

Niech f będzie funkcją wielomianową oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Liczba a jest miejscem zerowym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Inaczej mówiąc:

$$f(a) = 0 \iff f(x) = (x - a) \cdot g(x)$$

dla pewnego wielomianu $g(x)$.

Opierając się na powyższym twierdzeniu, pojęcia „pierwiastek wielomianu” i „miejsce zerowe funkcji wielomianowej” zdefiniowanej za pomocą tego wielomianu będziemy używali wymiennie.

Wniosek 5.8. Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych.

Ze względu na rozwiązywanie nierówności wielomianowych korzystna jest pewna klasyfikacja pierwiastków wielomianu.

Definicja 5.9. [Krotność pierwiastka]

Krotnością pierwiastka $a \in \mathbb{R}$ wielomianu $f(x)$ nazywamy największą liczbę naturalną $k \geq 1$ taką, że wielomian ten dzieli się bez reszty przez wielomian $(x - a)^k$.

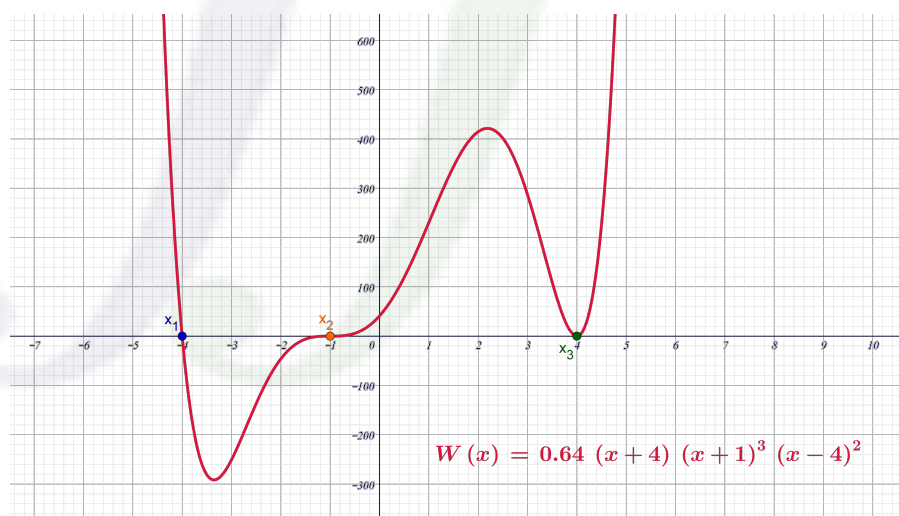
Mówimy wtedy, że a jest *pierwiastkiem k -krotnym* wielomianu.

Innymi słowy, liczba $a \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $g(x)$ taki, że

$$f(x) = (x - a)^k \cdot g(x) \quad \text{oraz} \quad g(a) \neq 0.$$

Geometrycznie oznacza to, że jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, to punkt $(a, 0)$ jest punktem wspólnym wykresu funkcji wielomianowej f i osi Ox . Dodatkowo, jeśli a jest pierwiastkiem o krotności nieparzystej, to wykres przecina oś Ox . W przeciwnym przypadku (krotność parzysta) wykres funkcji f jedynie styka się z osią odciętych.

Na poniższym rysunku $x_1 = -4$ i $x_2 = -1$ są pierwiastkami o krotności nieparzystej, a $x_3 = 4$ jest pierwiastkiem o krotności parzystej i w tym miejscu wykres nie przecina osi Ox tylko „odbija się” od niej.



Więcej eksperymentów związanych z tą obserwacją można przeprowadzić korzystając z materiałów zawartych w e-kursie lub bezpośrednio korzystając z apletu GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/s4mM6fC5>.

Równania i nierówności wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n nazywamy równanie postaci

$$f(x) = 0,$$

gdzie f jest funkcją wielomianową stopnia n .

Przykładami równań wielomianowych były rozważane już przez nas równania liniowe i kwadratowe.

Rozwiązanie równania wielomianowego stopnia n sprowadza się zatem do wyznaczania pierwiastków wielomianu stopnia n . Zgodnie z Wnioskiem 5.8 równanie wielomianowe stopnia n nie może mieć więcej niż n rozwiązań rzeczywistych.

Sposoby wyznaczania pierwiastków wielomianu:

- rozkładanie wielomianu na czynniki (liniowe i kwadratowe) za pomocą przekształceń algebraicznych (grupowanie wyrazów, wzory skróconego mnożenia, itp.);
- wykorzystanie twierdzeń o pierwiastkach całkowitych i wymiernych wielomianu.

Twierdzenie 5.10. [o pierwiastkach całkowitych wielomianu]

Jeżeli liczba całkowita jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych i o niezerowym wyrazie wolnym, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego.

Twierdzenie 5.11. [o pierwiastkach wymiernych wielomianu]

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych i o niezerowym wyrazie wolnym, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q jest dzielnikiem współczynnika wiodącego.

Przykład 5.12. Rozwiązać równanie wielomianowe stopnia piątego

$$x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0.$$

Rozwiązanie: Wielomian po lewej stronie równości rozłożymy na nierozkładalne czynniki za pomocą prostych przekształceń algebraicznych (wylączanie przed nawias wspólnego czynnika i wzory skróconego mnożenia):

$$x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^3 + 1) \cdot (x^2 - 4) = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2).$$

Wynika stąd, że

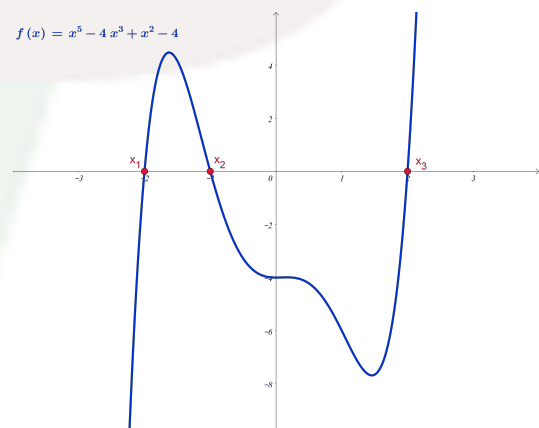
$$x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0 \iff (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 - x + 1) = 0.$$

Wielomian przyjmuje wartość zero wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się jeden czynników w powstałym iloczynie.

Trójmian kwadratowy $x^2 - x + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych ($\Delta < 0$), zatem zerować mogą się tylko czynniki liniowe.

Równanie wielomianowe ma więc trzy rozwiązania rzeczywiste

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1 \quad \text{i} \quad x_3 = 2.$$



Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy nierówność postaci

$$f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) \geq 0.$$

gdzie f jest funkcją wielomianową stopnia n .

Przykładami nierówności wielomianowych były rozważane już przez nas nierówności liniowe i kwadratowe.

Rozwiązując nierówność wielomianową stopnia n rozpoczynamy podobnie, jak przy rozwiązywaniu równań wielomianowych, tzn. wyznaczamy pierwiastki wielomianu stopnia n , ale tym razem wraz z krotnościami. Następnie szkicujemy wykres funkcji wielomianowej uwzględniając opisane powyżej wpływ współczynnika wiodącego i wpływ krotności pierwiastków na przebieg krzywej wielomianowej.

Przykład 5.13. Rozwiązać nierówność wielomianową stopnia czwartego

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 \leq 0.$$

Rozwiązanie: Wielomian $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ po lewej stronie równości rozłożymy na nierozkładalne czynniki korzystając z twierdzenia 5.10 o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych. Wyraz wolny wielomianu $a_0 = 12$ jest podzielny przez

$$-1, \quad 1, \quad -2, \quad 2, \quad -3, \quad 3, \quad -4, \quad 4, \quad -6, \quad 6, \quad -12, \quad 12.$$

Łatwo sprawdzić, że pierwszy dzielnik -1 jest pierwiastkiem wielomianu. Dzieląc wielomian $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ przez dwumian $x + 1$ (np. używając schemat Hornera) dostajemy

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 1) \cdot (x^3 - x^2 - 8x + 12).$$

Postępując analogicznie dostajemy rozkład wielomianu na czynniki

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2.$$

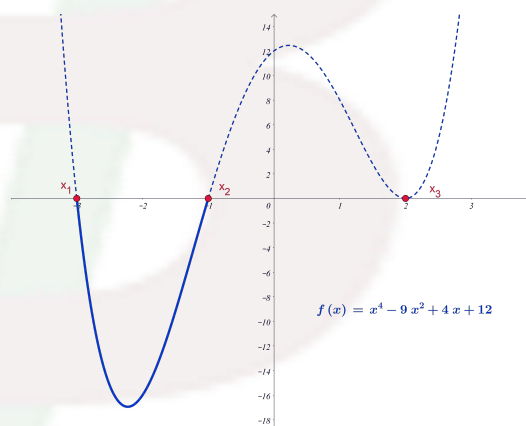
Wynika stąd, że

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -1 \quad \text{i} \quad x_3 = 2$$

są pierwiastkami wielomianu, przy czym dwa pierwsze są pierwiastkami jednokrotnymi, a trzeci – pierwiastkiem dwukrotnym.

Szkicujemy teraz przybliżony wykres funkcji wielomianowej.

- Na osi Ox zaznaczamy wszystkie pierwiastki wielomianu.
- Współczynnik wiodący wielomianu $a_4 = 1$ jest dodatni, zatem rysowanie krzywej wielomianowej rozpoczynamy od góry z prawej strony, ponieważ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ niezależnie od stopnia wielomianu.
- Krzywa dochodzi do pierwiastka dwukrotnego $x_3 = 2$ i odbija się pozostając nad osią Ox .
- Następnie w punkcie $x_2 = -1$ krzywa przecina oś Ox i przechodzi na drugą stronę, a potem ponownie w punkcie $x_1 = -3$.



Na podstawie wykresu określamy zbiór rozwiązań nierówności wielomianowej pamiętając przy tym, że nierówność jest słaba, zatem jest spełniona także dla pierwiastków wielomianu:

$$f(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \langle -3, -1 \rangle \cup \{2\}.$$

Własności

Działania arytmetyczne dodawania, odejmowania i mnożenia wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez liczbę przeprowadzamy tak samo, jak analogiczne operacje na wyrażeniach algebraicznych. Ponadto zbiór wielomianów jest zamknięty ze względu na te operacje, co sprecyzujemy w kolejnym twierdzeniu.

Własności 5.14. Jeśli f i g są wielomianami i $\lambda \in \mathbb{R}$, to $\lambda \cdot f$, $f + g$ oraz $f \cdot g$ są wielomianami.

Lemat 5.15. Niech f będzie wielomianem postaci $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$. Jeśli $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $a_0 = \dots = a_n = 0$.

Wniosek 5.16. Jeśli dwie funkcje wielomianowe są równe, to mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach.

5.2.1 Funkcja liniowa

Funkcja liniowa jest przeważnie zdefiniowana za pomocą wielomianu stopnia pierwszego, ale dla pewnych współczynników także wielomianu stopnia zerowego (funkcja stała i różna od zera) lub wielomianu zerowego (funkcja tożsamościowo równa zero). Funkcja liniowa jest zatem *funkcją wielomianową* stopnia co najwyżej pierwszego.

Definicja 5.17. Niech liczby $a, b \in \mathbb{R}$ będą ustalone. Funkcję postaci

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = a \cdot x + b. \end{cases}$$

nazywamy *funkcją liniową*.

Przykład 5.18. Jedną z najprostszych funkcji liniowych jest funkcja, która liczbie $x \in \mathbb{R}$ przypisuje tę samą liczbę x , czyli

$$f(x) = x.$$

Funkcja taka nazywana jest *identycznością* (*funkcją identycznościową*) zbioru liczby rzeczywistych i często oznaczana symbolem $\text{id}_{\mathbb{R}}$.

Dziedzina i zbiór wartości

Dziedziną D_f i *przeciwdziedziną* funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych. O takich funkcjach mówimy, że są *funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej*.

Zbiór wartości jest natomiast zależny od parametru a i mamy dwie możliwości:

$$W_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{dla } a \neq 0, \\ \{b\} & \text{dla } a = 0, \end{cases}$$

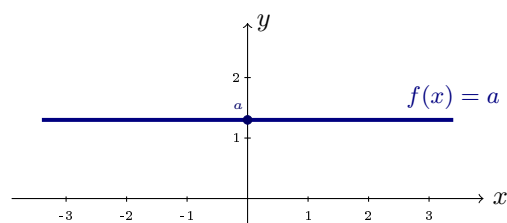
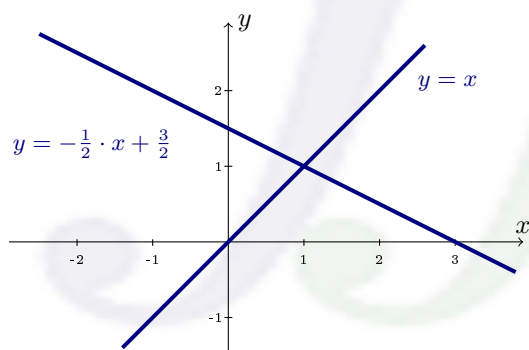
co łatwo można zaobserwować na rysunkach poniżej.

Wykres

Nazwa „funkcja liniowa” wywodzi się z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.19. Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta.

Inaczej mówiąc, wykresem funkcji danej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$. Poniżej znajdują się wykresy przykładowych funkcji liniowych:

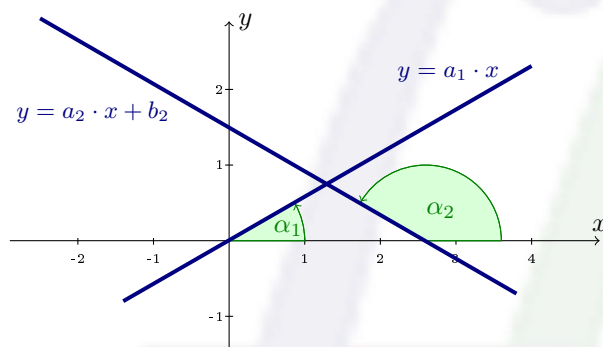


Zauważmy, że wykresem funkcji identycznościowej jest prosta o równaniu $y = x$ składająca się z punktów o równych współrzędnych.

Wykresem funkcji liniowej f jest prosta, zatem do narysowania go wystarczy obliczyć wartości funkcji f dla dwóch dowolnie wybranych argumentów x_1 i x_2 . Punkty o współrzędnych $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ wyznaczają jednoznacznie prostą będącą wykresem danej funkcji.

Parametry a i b występujące we wzorze funkcji liniowej mają naturalną interpretację geometryczną i określają położenie wykresu funkcji liniowej w układzie współrzędnych.

Definicja 5.20. Parametr a nazywany jest *współczynnikiem kierunkowym*, natomiast parametr b to *współczynnik przesunięcia* lub *wyraz wolny* funkcji liniowej.



Współczynnik kierunkowy a określa nachylenie prostej będącej wykresem funkcji liniowej w stosunku do osi Ox .

Twierdzenie 5.21. Jeżeli kąt skierowany między prostą o równaniu $y = ax + b$ a dodatnią częścią osi Ox ma miarę α , to jego tangens równy jest parametrowi a , tzn.

$$\operatorname{tg} \alpha = a.$$

Z powyższego twierdzenia wynika między innymi, że

- Jeśli $a > 0$, to $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,
czyli kąt α między wykresem funkcji a dodatnią częścią osi Ox jest ostry.
- Jeśli $a < 0$, to $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,
czyli kąt α między wykresem funkcji a dodatnią częścią osi Ox jest rozwarty.
- Jeśli $a = 0$, to $\alpha = 0$, czyli wykres funkcji jest prostą poziomą.

Dodatkowo możemy powiedzieć, że wykres funkcji liniowej o współczynniku kierunkowym $a = 1$ jest nachylony pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{4}$ w stosunku do dodatniej części osi Ox , natomiast dla $a = -1$ pod kątem $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Współczynnik przesunięcia b określa natomiast przesunięcie wykresu funkcji liniowej wzdłuż osi Oy . Przesunięcie to jest równoległe względem wykresu funkcji $f(x) = ax$ w górę (dla $b > 0$) lub w dół (dla $b < 0$). Inaczej mówiąc proste o równaniach $y = ax$ i $y = ax + b$ są równoległe dla każdego parametru $b \in \mathbb{R}$.

Punkt o współrzędnych $(0, b)$ jest miejscem przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią Oy .

Punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią Ox ma współrzędne $(-\frac{b}{a}, 0)$ dla $a \neq 0$.

Jeśli natomiast $a = 0$, to mamy dwie możliwości. Dla $b \neq 0$ wykres funkcji liniowej nie przecina osi Ox (jest do niej równoległy), a dla $b = 0$ wykres ten pokrywa się z osią Ox .

Własności funkcji liniowej

Własność 5.22. Jeśli współczynnik kierunkowy $a \neq 0$, to funkcja liniowa jest funkcją **różnowartościową** (iniekcją).

Oznacza to, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków:

a) $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2);$

b) $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$

gdzie $f(x_1) = ax_1 + b$ oraz $f(x_2) = ax_2 + b$.

W tym przypadku ($a \neq 0$) funkcja liniowa jest także funkcją *wzajemnie jednoznaczną (bijekcją)*. Jest więc funkcją *odwracalną*, a jej *funkcja odwrotna* jest także funkcją liniową daną wzorem

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

Wykresy funkcji liniowej i jej funkcji odwrotnej są do siebie symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

☞ Zachęcamy do eksperymentów z apilem GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/rjvxpgz7>.

Przykład 5.23. Wyznaczyć, o ile istnieje, funkcję odwrotną funkcji liniowej danej wzorem

$$f(x) = 2x + 4.$$

Rozwiązanie:

- ❶ Współczynnik kierunkowy $a = 2$ jest różny od zera, zatem funkcja f jest odwracalna.
- ❷ Zapiszmy wzór funkcji w wygodniejszej dla nas postaci oznaczając symbolem y wartość funkcji:

$$y = 2x + 4.$$

- ❸ Przekształćmy teraz powyższą równość wyznaczając z niej zmienną x :

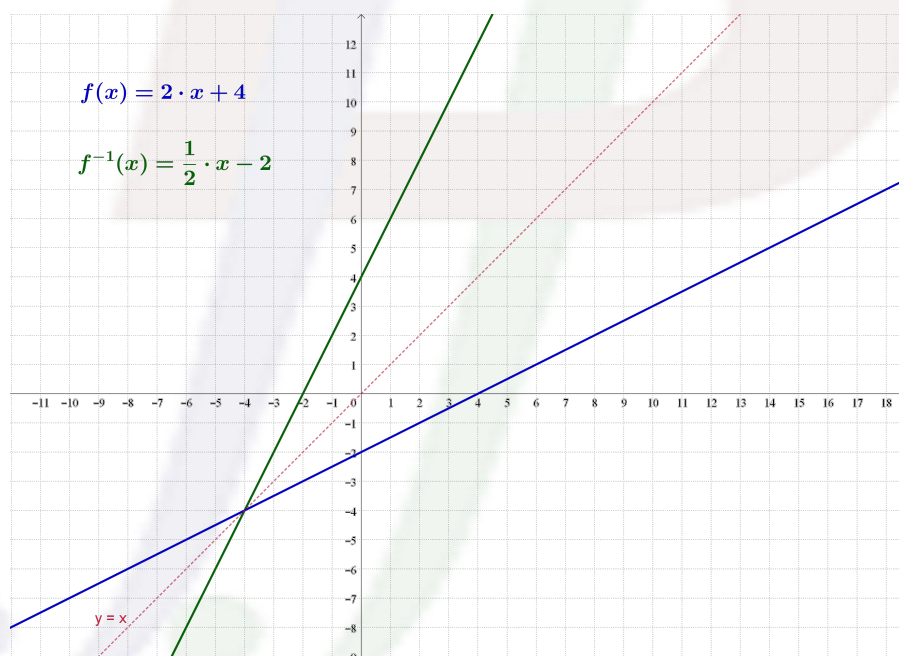
$$y = 2x + 4 \iff 2x = y - 4 \iff x = \frac{1}{2}y - 2.$$

- ❹ Właściwie zadanie wyznaczenia funkcji odwrotnej zostało już wykonane. Jesteśmy jednak przyzwyczajeni do tego, żeby argumenty funkcji oznaczać symbolem x , a wartości funkcji symbolem y . Z tego powodu zamieńmy oznaczenia w ostatniej równości

$$y = \frac{1}{2}x - 2.$$

- ❺ Funkcją odwrotną funkcji f jest zatem funkcja liniowa dana wzorem

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2.$$



Własność 5.24. Niech $f(x) = ax + b$ będzie funkcją liniową.

- a) Jeśli $a < 0$, to f jest funkcją *malejącą*, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 + b > ax_2 + b$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- b) Jeśli $a > 0$, to f jest funkcją **rosnącą**, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 + b < ax_2 + b.$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- c) Jeśli $a = 0$, to f jest funkcją **stałą**, tzn.

$$f(x) = b$$

dla wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$.

☞ Zachęcamy do eksperymentów z apilem GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/eakapb7g>

Różnowartościowość funkcji liniowej oznacza, że **równania liniowe**, czyli równania postaci

$$ax + b = 0,$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, a x jest niewiadomą, mają **dokładnie jedno** rozwiązanie. Równaniami liniowymi są przykładowo równania

$$5x - 3 = 0, \quad -x + 4 = 0, \quad 3x + 17 = 0.$$

Rozwiązanie $x_0 \in \mathbb{R}$ równania liniowego $ax + b = 0$ jest **miejszem zerowym** funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Funkcja liniowa ma zatem dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$, jeśli $a \neq 0$.

Natomiast dla $a = 0$ funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych, o ile $b \neq 0$. W przeciwnym przypadku ma ich nieskończenie wiele (funkcja równa tożsamościowo zero).

Nierównością liniową nazywamy nierówność jednej z postaci

$$ax + b < 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0,$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, a x jest niewiadomą. Przykładowo

$$x - 3 > 0, \quad -2x + 7 \geq 0, \quad \frac{1}{3}x - 5 < 0, \quad 3x + 4 \leq 0.$$

Jak łatwo zauważyć na postać rozwiązania nierówności liniowej ma wpływ monotoniczność odpowiadającej funkcji liniowej, a zatem współczynnik kierunkowy a .

Uwaga 5.25. Jak już mówiliśmy nazwa funkcji liniowej wywodzi się z faktu, że jej wykresem jest linia prosta. Warto jednak wiedzieć, że w dziale matematyki nazywanym algebrą liniową własność zwaną **liniowością** definiuje nie w oparciu o własności geometryczne, lecz o własności algebraiczne zachowujące strukturę tzw. przestrzeni liniowych. Funkcje mające tę własność nazywa się **odwzorowaniami liniowymi**. Okazuje się, że omawiana wyżej funkcja liniowa jest odwzorowaniem liniowym tylko wtedy, gdy $b = 0$, czyli gdy jest tzw. **funkcją jednorodną**.

5.2.2 Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa związana jest z wielomianem stopnia drugiego (trójmian kwadratowy), jest zatem **funkcją wielomianową** stopnia drugiego.

Definicja 5.26. Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b, c \in \mathbb{R}$. Funkcję postaci

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := ax^2 + bx + c. \end{cases}$$

nazywamy **funkcją kwadratową**.

Wyrażenie $ax^2 + bx + c$ nazywamy **trójmianem kwadratowym**, a liczby a , b i c **współczynnikami** funkcji kwadratowej lub trójmianu kwadratowego.

Dziedzina i zbiór wartości

Dziedziną D_f i *przeciwdziedziną* funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych. O takich funkcjach mówimy, że są *funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej*.

Zbiór wartości jest natomiast zależny od współczynników, wśród których szczególną rolę odgrywa współczynnik a :

$$W_f = \begin{cases} \left\langle -\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right\rangle & \text{dla } a > 0, \\ \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right] & \text{dla } a < 0, \end{cases}$$

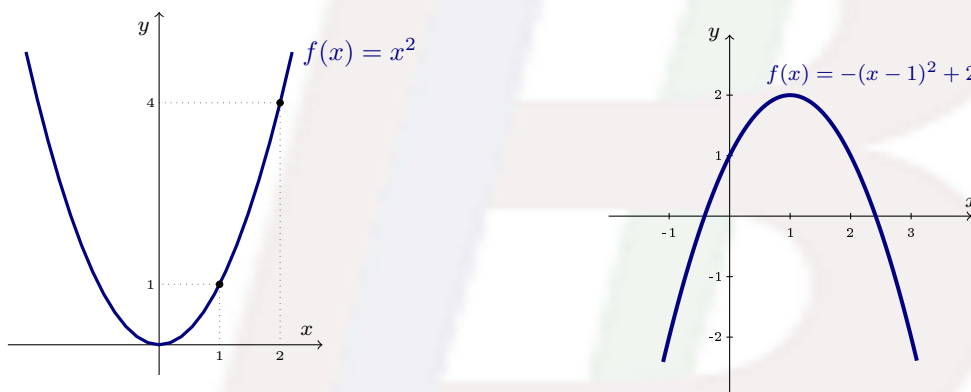
gdzie tak zwany *wyróżnik trójkianu kwadratowego* Δ zdefiniowany jest wzorem

$$\Delta := b^2 - 4ac.$$

Liczba $q := -\frac{\Delta}{4a}$ określająca zbiór wartości jest w istotny sposób związana z wykresem funkcji kwadratowej, do czego wrócimy w następnym punkcie.

Wykres

Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana *parabolą*. Poniżej znajdują się wykresy przykładowych funkcji kwadratowych:



Punktem charakterystycznym paraboli jest jej **wierzchołek** o współrzędnych (p, q) , gdzie

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Prosta o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii paraboli.

Współczynnik a ze wzoru funkcji kwadratowej ma istotny wpływ na wygląd paraboli:

$$\begin{aligned} a > 0 &\implies \text{ramiona paraboli skierowane ku górze,} \\ a < 0 &\implies \text{ramiona paraboli skierowane ku dołowi.} \end{aligned}$$

Ponadto wartość współczynnika a zmienia rozwartość ramion.

Położenie wierzchołka paraboli, a dokładnie jego rzędną $q = -\frac{\Delta}{4a}$, oraz skierowanie ramion paraboli uzasadnia zbiór wartości funkcji kwadratowej podany w poprzednim punkcie.

 Zależność paraboli od współczynników funkcji kwadratowej można badać korzystając z materiałów dodatkowych e-kursu!

Postać ogólna funkcji kwadratowej

Przeważnie spotykamy się z funkcją kwadratową w postaci zdefiniowanej na wstępie, czyli

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

która wydaje się być najłatwiejsza do zapamiętania.

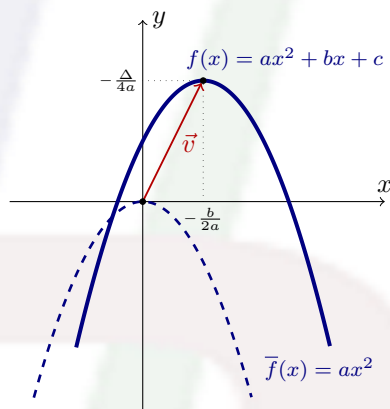
Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Jednak przykładowo do odczytywania zbioru wartości funkcji kwadratowej, współrzędnych wierzchołka paraboli oraz narysowania wykresu wygodniejsza jest tzw. postać kanoniczna

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$.

Z postaci tej wynika, że wykres funkcji f powstaje przez przesunięcie równoległe paraboli o równaniu $y = ax^2$ o wektor $\vec{v} = [p, q]$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{\Delta}{4a}$.



Każdą funkcję kwadratową w postaci ogólnej możemy zapisać w postaci kanonicznej korzystając z prostych operacji algebraicznych, tzw. metodą dopełniania do kwadratu.

Przykład 5.27. Wyznaczyć postać kanoniczną funkcji kwadratowej danej wzorem

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x^2 - 4x + 4 - 9) = \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 18 = 2(x - 2)^2 - 18. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że zbiór wartości funkcji f to przedział $W_f = \langle -18, +\infty \rangle$, a parabola będąca wykresem funkcji f ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych $(2, -18)$ i powstała z paraboli o równaniu $y = 2x^2$ przez przesunięcie równoległe.

Czasami wyznaczając postać kanoniczną wygodniej jest zapamiętać gotowy wzór

$$f(x) = a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.$$

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Niektóre funkcje kwadratowe można zapisać w jeszcze jednej postaci zwanej postacią iloczynową:

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

To, czy dana funkcja kwadratowa da się zapisać w postaci iloczynowej i jak ona dokładnie wygląda, zależy od znaku wyróżnika Δ .

- $\Delta > 0$.

Wtedy funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

i to one właśnie występują w jej postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right),$$

co można wykazać korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

Parabola będąca wykresem takiej funkcji kwadratowej ma zatem dwa punkty wspólne z osią Ox , a mianowicie $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$. Ponadto

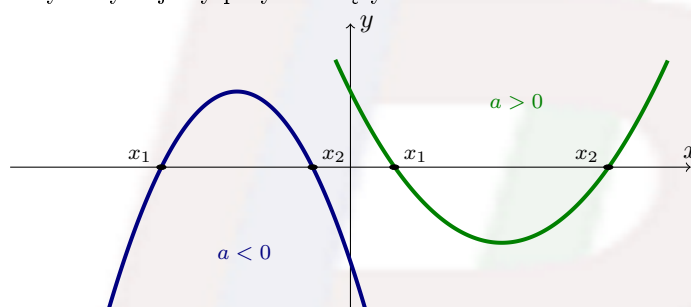
$$a > 0 \implies f(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$$

$$f(x) < 0 \text{ dla } x \in (x_1, x_2);$$

$$a < 0 \implies f(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$$

$$f(x) > 0 \text{ dla } x \in (x_1, x_2).$$

Powyższe zależności wykorzystujemy przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowych.



• $\Delta = 0$.

Wtedy funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

a jej postać iloczynowa to

$$f(x) = a(x - x_0)^2 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

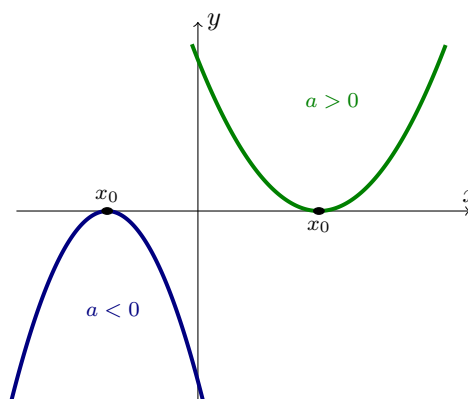
Ponadto

$$a > 0 \implies f(x) \geq 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R};$$

$$a < 0 \implies f(x) \leq 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Inaczej mówiąc, parabola, która jest wykresem funkcji f , ma tylko jeden punkt wspólny z osią Ox !

Przy czym, gdy $a > 0$, to parabola leży powyżej osi Ox , a gdy $a < 0$, to parabola leży poniżej osi Ox .



• $\Delta < 0$.

Wtedy funkcja kwadratowa nie ma rzeczywistych miejsc zerowych ani postaci iloczynowej.

Parabola będąca wykresem tej funkcji nie przecina osi Ox i leży całkowicie powyżej ($a > 0$) lub poniżej ($a < 0$) tej osi.

Przykład 5.28. Wyznaczyć postać iloczynową funkcji kwadratowej danej wzorem

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z obliczeń z przykładu 5.27 i ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 18 = 2((x - 2)^2 - 3^2) = 2((x - 2) + 3) \cdot ((x - 2) - 3) = 2(x + 1) \cdot (x - 5).$$

Z postaci iloczynowej wynika, że funkcja f ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$.

Wzory Viéte'a

Często zamiast znajomości pierwiastków trójmianu kwadratowego wystarczy nam określenie ich znaków. Wtedy z pomocą przychodzą wzory Viéte'a:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\implies \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \end{cases} \\ \Delta = 0 &\implies \begin{cases} 2x_0 = -\frac{b}{a}, \\ x_0^2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wzory Viéte'a mają zastosowanie przy badaniu równań i nierówności kwadratowych z parametrem.

☞ Wzory te są także prawdziwe dla $\Delta < 0$, czyli dla pierwiastków zespolonych trójmianu kwadratowego!

Własności funkcji kwadratowej

Przy określaniu podstawowych własności funkcji kwadratowej szczególną rolę ponownie odgrywa wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji, a dokładniej jego odcięta $p = -\frac{b}{2a}$.

Funkcja kwadratowa **nie jest** funkcją różnowartościową! Nie dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ spełniony jest bowiem warunek

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Przykładowo, dla funkcji $f(x) = x^2$ mamy

$$-2 \neq 2 \quad \wedge \quad f(-2) = 4 = f(2).$$

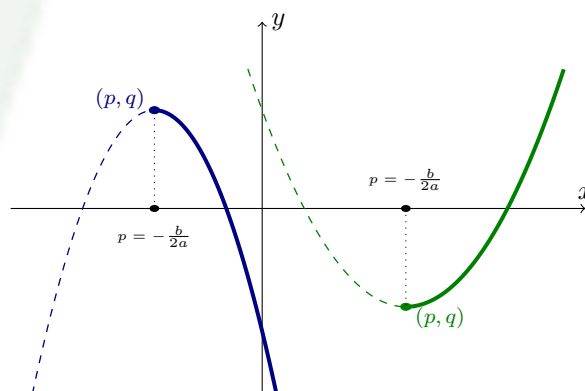
Jeśli jednak zmniejszymy odpowiednio dziedzinę funkcji kwadratowej, to możemy z niej zrobić funkcję różnowartościową.

Przykładowo, funkcja

$$\tilde{f}: \begin{cases} \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c, \end{cases}$$

jest funkcją różnowartościową.

Wykresem funkcji $\tilde{f}$ jest część paraboli narysowana linią ciągłą!



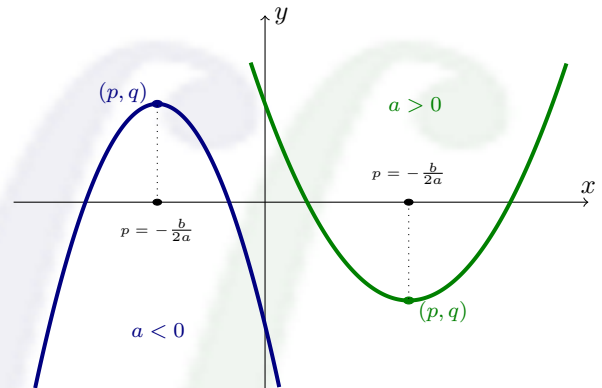
Własność 5.29. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ będzie funkcją kwadratową.

a) Jeśli $a < 0$, to f jest funkcją

- **rosnącą** w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$;
- **malejącą** w przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

b) Jeśli $a > 0$, to f jest funkcją

- **malejącą** w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$;
- **rosnącą** w przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.



5.3 Funkcje wymierne

Rozważmy teraz kolejny typ *funkcji elementarnych*, czyli tak zwane funkcje wymierne. Są one zdefiniowane za pomocą funkcji wielomianowych, dlatego przed rozpoczęciem pracy z tym działem warto powtórzyć wiadomości dotyczące wielomianów.

Definicja 5.30. Niech f i g będą funkcjami wielomianowymi oraz niech $g(x)$ będzie wielomianem niezerowym. Funkcję postaci

$$r: \begin{cases} \mathbb{R} \supseteq D_r \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{cases}$$

nazywamy *funkcją wymierną*, przy czym jej dziedziną jest zbiór

$$D_r = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ nazywamy *wyrażeniem wymiernym*.

Funkcje wymierne możemy, podobnie jak ułamki, podzielić na dwa rodzaje: na funkcje wymierne właściwe i niewłaściwe.

Funkcję wymierną nazywamy *funkcją wymierną właściwą*, jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy niż stopień wielomianu w mianowniku. W przeciwnym przypadku mówimy, że funkcja jest *funkcją wymierną niewłaściwą*.

Twierdzenie 5.31. [o funkcji wymiernej niewłaściwej]

Każdą niewłaściwą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę pewnej niezerowej funkcji wielomianowej oraz właściwej funkcji wymiernej.

Przedstawienie niewłaściwej funkcji wymiernej w postaci sumy funkcji wielomianowej i wymiernej właściwej otrzymuje się dzieląc wielomian w liczniku przez wielomian w mianowniku.

Przykład 5.32. Funkcję wymierną niewłaściwą (równoważnie: wyrażenie wymierne niewłaściwe)

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 1}$$

można przedstawić w postaci

$$r(x) = x^2 + 4x + 1 + \frac{7x + 5}{x^2 + x - 1},$$

gdzie wielomian $x^2 + 4x + 1$ jest wynikiem a wielomian $7x + 5$ jest resztą z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez wielomian $g(x)$.

Równoważnie oznacza to, że

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 4x + 1) \cdot (x^2 + x - 1) + 7x + 5.$$

Przedstawienie niewłaściwej funkcji wymiernej w postaci sumy funkcji wielomianowej i wymiernej właściwej będziemy między innymi wykorzystywać przy obliczaniu całek z funkcji wymiernych (wykład: *Analiza Matematycznej 1*). Z tego powodu warto opanować umiejętność dzielenia wielomianów.

Ponadto okazuje się, że każdą właściwą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy tzw. ułamków prostych, czyli funkcji postaci

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n},$$

gdzie trójmian ax^2+bx+c jest nierozkładalny.

Tę własność również wykorzystuje się podczas całkowania funkcji wymiernych.

Najprostszym przykładem funkcji wymiernej jest funkcja zdefiniowana poniżej. Krzywą będącą jej wykresem nazywamy *hiperbolą*.

Przykład 5.33.

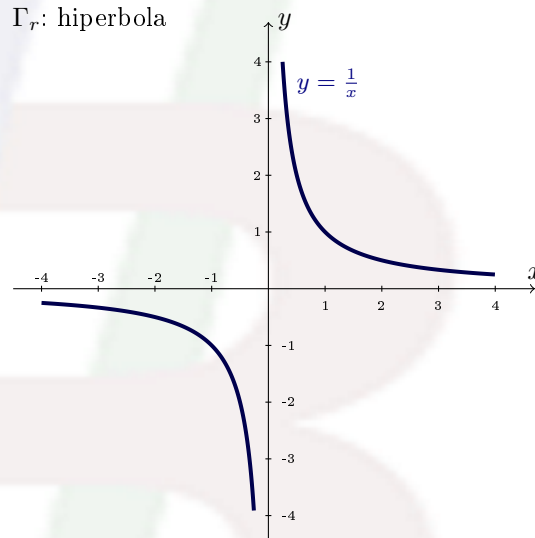
Niech

$$r: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Dziedzina: $D_r = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

Zbiór wartości: $W_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Γ_r : hiperbola



5.3.1 Dziedzina, zbiór wartości i wykres

Funkcje wymierne są, podobnie jak funkcje wielomianowe, *funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej*, co oznacza, że jej argumenty i wartości są liczbami rzeczywistymi. Jednak **dziedziną** funkcji wymiernej nie musi być cały zbiór liczb rzeczywistych, jak to miało miejsce w przypadku funkcji wielomianowych, ponieważ musimy z niego usunąć liczby będące miejscami zerowymi mianownika. Oznacza to, że dziedzina nie musi być *zbiorem spójnym* („w jednym kawałku”), a może być sumą rozłącznych przedziałów (zob. przykład 5.33).

Z tego powodu, mimo, że funkcje wymierne są również *funkcjami ciągłymi*, to niekoniecznie ich **wykres** da się narysować jednym pociągnięciem ołówka.

Trudno jest w ogólny sposób opisać dokładnie krzywe będące wykresami funkcji wymiernych, są one bardzo zróżnicowane i mają rozmaite kształty. Najlepiej robić to w każdym przypadku osobno, wykonując tzw. *przebieg zmienności funkcji*, czym będziemy się zajmować w późniejszym terminie. Procedura ta pomoże nam także określić **zbiór wartości** rozpatrywanej funkcji wymiernej.

Wykres funkcji wymiernej może mieć asymptoty. *Asymptotami* nazywamy takie proste, że odległość między nimi a wykresem funkcji robi się dowolnie małą. W przykładzie 5.33 asymptotami są proste o równaniach $x = 0$ i $y = 0$, nazywamy je odpowiednio asymptotą pionową i poziomą.

Tematem asymptot, w szczególności metodami ich wyznaczania, będziemy się zajmować dokładniej w dziale dotyczącym granic funkcji (podrozdział 15.5) i badania zmienności przebiegu funkcji (wykład: *Analiza Matematyczna 1*), a tymczasem

☞ zachęcamy do eksperymentów z apilem GeoGebry <https://www.geogebra.org/m/eekyczczu>.

5.3.2 Równania i nierówności wymierne

Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami (lub każde równanie, które można sprowadzić do takiej postaci).

☞ Rozwiązanie równania wymiernego można zatem sprowadzić do następujących trzech punktów.

- Wyznaczenie dziedziny równania, czyli dziedziny wyrażenia wymiernego $\frac{f(x)}{g(x)}$.
Jak pamiętamy, jest to zbiór liczb rzeczywistych, z którego usuwamy pierwiastki wielomianu $g(x)$:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

- Rozwiązanie równania wielomianowego

$$f(x) = 0.$$

Metody wyznaczania pierwiastków wielomianów zostały opisane w poprzednim rozdziale.

- Sprawdzenie, czy wyznaczone pierwiastki wielomianu $f(x)$ należą do dziedziny równania. Jeśli tak, to są one rozwiązaniami równania wymiernego.

Równanie wymierne nie może mieć więcej rozwiązań niż wynosi stopień wielomianu w liczniku!

Przykład 5.34. Rozwiązać równanie wymierne

$$\frac{19x - 57}{x^2 + x - 12} + \frac{5x}{x + 4} = 6.$$

Rozwiązanie:

- Wyznaczamy dziedzinę równania

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 12 \neq 0 \text{ i } x + 4 \neq 0\}.$$

Zauważmy, że

$$x^2 + x - 12 = (x + 4) \cdot (x - 3) \neq 0 \iff x \neq -4 \text{ i } x \neq 3,$$

zatem

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}.$$

- Przekształcamy równanie do postaci podanej w definicji równania wymiernego

$$\begin{aligned} \frac{19x - 57}{x^2 + x - 12} + \frac{5x}{x + 4} = 6 &\iff \frac{19x - 57}{(x + 4) \cdot (x - 3)} + \frac{5x(x - 3)}{(x + 4) \cdot (x - 3)} - \frac{6(x^2 + x - 12)}{(x + 4) \cdot (x - 3)} = 0 \iff \\ &\iff \frac{19x - 57 + 5x^2 - 15x - 6x^2 - 6x + 72}{(x + 4) \cdot (x - 3)} = 0 \iff \\ &\iff \frac{-x^2 - 2x + 15}{(x + 4) \cdot (x - 3)} = 0. \end{aligned}$$

- Zapisujemy wielomian w liczniku w postaci iloczynowej i rozwiązujemy równanie wielomianowe

$$-x^2 - 2x + 15 = 0 \iff -(x + 5)(x - 3) = 0 \iff x = -5 \text{ lub } x = 3.$$

- Sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązania równania wielomianowego należą do dziedziny

$$x = -5 \in D \quad \text{i} \quad x = 3 \notin D,$$

zatem równanie wymierne ma tylko jedno rozwiązanie

$$x = -5.$$



Nierówność wymierną nazywamy nierówność postaci

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami (lub każdą nierówność, którą można sprowadzić do takiej postaci).

Zanim rozpoczniemy omawianie nierówności wymiernych, zauważmy następujący fakt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 &\iff f(x) \cdot g(x) < 0, \\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 &\iff f(x) \cdot g(x) \leq 0 \text{ i } g(x) \neq 0, \\ \frac{f(x)}{g(x)} > 0 &\iff f(x) \cdot g(x) > 0, \\ \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 &\iff f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ i } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że nierówności wymierne można sprowadzić do nierówności wielomianowych, ponieważ iloczyn $f(x) \cdot g(x)$ jest wielomianem. Musimy tylko uwzględnić dziedzinę nierówności.

Przykład 5.35. Rozwiązać nierówność wymierną

$$\frac{19x - 57}{x^2 + x - 12} + \frac{5x}{x + 4} \leq 6.$$

Rozwiązanie:

- Dziedzinę wyrażenia wymiernego po lewej stronie nierówności wyznaczyliśmy w przykładzie 5.34:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}.$$

- Wykorzystując również przekształcenia z tego przykładu zapisujemy nierówność w postaci podanej w definicji nierówności wymiernych

$$\frac{19x - 57}{x^2 + x - 12} + \frac{5x}{x + 4} \leq 6 \iff \frac{-x^2 - 2x + 15}{(x + 4) \cdot (x - 3)} \leq 0.$$

- Następnie zamieniamy nierówność wymierną na równoważną postać wielomianową

$$\frac{-x^2 - 2x + 15}{(x + 4) \cdot (x - 3)} \leq 0 \iff (-x^2 - 2x + 15) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) \leq 0, \quad x \in D.$$

- Rozwiązujemy teraz w znany już sposób nierówność wielomianową

$$(-x^2 - 2x + 15) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) \leq 0 \iff -(x + 5)(x + 4)(x - 3)^2 \leq 0 \iff x \in \langle -5, -4 \rangle \cup \{3\}.$$

- Porównujemy otrzymany zbiór rozwiązań nierówności wielomianowej z dziedziną i jako zbiór rozwiązań rozważanej nierówności wymiernej otrzymujemy przedział

$$\langle -5, -4 \rangle.$$

5.4 Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

Rozważmy dowolny kąt oraz okrąg o środku w wierzchołku kąta. *Miarą łukową* kąta nazywamy stosunek długości l łuku okręgu, na którym oparty jest kąt, do promienia r okręgu.

Jednostką miary łukowej kąta jest radian. Jest to miara kąta opartego na łuku okręgu o długości równej promieniowi. Jeden radian to w przybliżeniu $57,3^\circ$. Między miarą stopniową a miarą łukową kąta zachodzą zależności

$$\alpha [\text{rad}] = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \quad \text{i} \quad \alpha^\circ = \frac{\alpha [\text{rad}] \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Mówimy, że kąt jest w *położeniu standardowym*, jeżeli jego wierzchołek leży w początku układu współrzędnych, a ramię początkowe na dodatniej części osi Ox . Kąty mierzone od osi Ox w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara nazywamy kątami dodatnimi, a w kierunku zgodnym – ujemnymi. Znane definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym możemy uogólnić na dowolne kąty skierowane (rozwarne, ujemne).

Definicja 5.36. Niech α będzie miarą dowolnego kąta skierowanego w położeniu standardowym w okręgu o promieniu r i niech (x, y) oznaczają współrzędne punktu przecięcia okręgu z ramieniem końcowym kąta. Funkcje trygonometryczne kąta o mierze α są określone wzorami:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \text{ dla } x \neq 0, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \text{ dla } y \neq 0.$$

Z twierdzenia Talesa wynika, że wartości tych funkcji nie zależą od promienia r .

Funkcje sinus i cosinus są określone dla dowolnego kąta skierowanego α . Wprost z definicji tych funkcji wynikają następujące nierówności

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{i} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Natomiast funkcja tangens jest określona jeśli $x \neq 0$, czyli dla kątów $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podobnie, funkcja cotangens jest określona jeśli $y \neq 0$, czyli dla kątów $\alpha \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych wynika, że funkcja cosinus jest parzysta, natomiast pozostałe funkcje są nieparzyste.

Podobnie, oczywistym wnioskiem z definicji funkcji trygonometrycznych jest ich okresowość, przy czym funkcje sinus i cosinus mają okres 2π , a funkcje tangens i cotangens okres π .

Łatwo uzasadniamy, że funkcje trygonometryczne są monotoniczne w przedziałach $(k \cdot \frac{\pi}{2}, (k+1) \cdot \frac{\pi}{2})$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Przykładowo funkcje sinus i tangens są rosnące, a funkcje cosinus i cotangens malejące na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$. Rozważając kolejne przedziały tego typu i uwzględniając okresowość funkcji trygonometrycznych możemy określić ich monotoniczność.

 Zachęcamy do eksperymentowania z przekształceniami wykresów funkcji sinus i cosinus przy użyciu apletu GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/Gqvwvqka>.

Zadanie: Jako zadanie zostawiam Państwu przypomnienie sobie:

- wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów;
- wzorów redukcyjnych;
- funkcji sumy i różnicy kątów;
- funkcji podwojonego kąta;
- sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

 Do powtórki polecamy podręcznik M. Gewerta i Z. Skoczylasa *Wstęp do Analizy i Algebry*: https://gis.wroc.pl/pdf/www_03www.pdf.

Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wyrażeniach będących argumentami funkcji trygonometrycznych. Rozwiązanie równania rozpoczynamy od określenia jego dziedziny. Następnie najczęściej sprowadza się je do postaci podstawowej, tzn.

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

☞ Zachęcamy do zapoznania się z graficzną interpretacją podstawowych równań trygonometrycznych przy użyciu apletu GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/PzPmpSun>.

Podobnie postępujemy w przypadku nierówności trygonometrycznych. Istotną rolę odgrywa przy tym okresowość i monotoniczność funkcji trygonometrycznych.

5.4.1 Funkcje cyklometryczne

Z Uwagi 4.18 i własności funkcji trygonometrycznych otrzymujemy natychmiast następujący lemat.

Lemat 5.37.

- a) Funkcja sinus jest rosnąca na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ oraz obrazem tego przedziału jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, co zapisujemy: $\sin\left(\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle\right) = \langle -1, 1 \rangle$.

Funkcja

$$\sin: \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \longrightarrow \langle -1, 1 \rangle$$

jest zatem odwracalna.

- b) Funkcja cosinus jest malejąca na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ oraz obrazem tego przedziału jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, co zapisujemy: $\cos\left(\langle 0, \pi \rangle\right) = \langle -1, 1 \rangle$.

Funkcja

$$\cos: \langle 0, \pi \rangle \longrightarrow \langle -1, 1 \rangle$$

jest zatem odwracalna.

- c) Funkcja tangens jest rosnąca na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz obrazem tego przedziału jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $\operatorname{tg}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$.

Funkcja

$$\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

jest zatem odwracalna.

- d) Funkcja cotangens jest malejąca na przedziale $(0, \pi)$ oraz obrazem tego przedziału jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $\operatorname{ctg}\left((0, \pi)\right) = \mathbb{R}$.

Funkcja

$$\operatorname{ctg}: (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

jest zatem odwracalna.

Podsumowując, powyższe zacieśnienia (restrykcje) funkcji trygonometrycznych są bijekcjami, zatem są odwracalne i mają funkcje odwrotne. Funkcje odwrotne odpowiednich restrykcji funkcji trygonometrycznych nazywamy *funkcjami cyklometrycznymi* lub *kołowymi*.

Podstawowe własności funkcji cyklometrycznych, przedstawione poniżej, wynikają z ogólnych zależności między funkcjami wzajemnie odwrotnymi (np. zob. twierdzenie 4.19) oraz z własności restrykcji odpowiedniej funkcji trygonometrycznej.

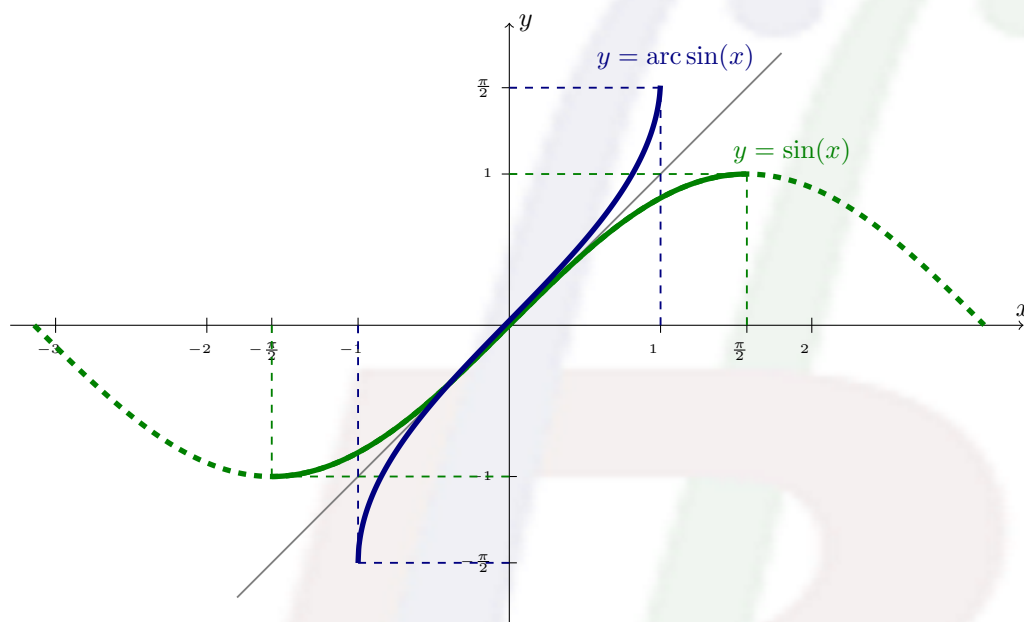
Definicja 5.38. [Funkcja arcus sinus]

Funkcję odwrotną funkcji $\sin: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ nazywamy *arcusem sinusem*:

$$\operatorname{arc} \sin: \begin{cases} \langle -1, 1 \rangle & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arc} \sin(x). \end{cases}$$

Dziedziną funkcji arcus sinus jest zatem przedział $D_{\arcsin} = \langle -1, 1 \rangle$, a zbiór wartości to $W_{\arcsin} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Wykres funkcji **arcus sinus** (niebieski) powstaje poprzez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$ wykresu zacieśnionej funkcji **sinus** (zielony).



Bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej otrzymujemy następującą równoważność

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x \quad \text{dla} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{ponieważ} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{\pi}{6} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Ponadto z faktu, że złożenie funkcji wzajemnie odwrotnych jest identycznością (zob. twierdzenie 4.15) otrzymujemy

$$(\sin \circ \arcsin)(x) = \sin(\arcsin x) = x \quad \text{dla} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

oraz

$$(\arcsin \circ \sin)(x) = \arcsin(\sin x) = x \quad \text{dla} \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Lemat 5.39. [Własności funkcji arcus sinus]

- Funkcja arcus sinus jest **bijekcją**, czyli w szczególności jest **różnowartościowa**.
- Funkcja arcus sinus jest funkcją **rosnącą** jako funkcja odwrotna rosnącego zacieśnienia sinusa.
- Funkcja arcus sinus jest funkcją **nieparzystą**, tzn.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

- Funkcja arcus sinus jest funkcją **ograniczoną**, tzn.

$$|\arcsin(x)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{dla każdego} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

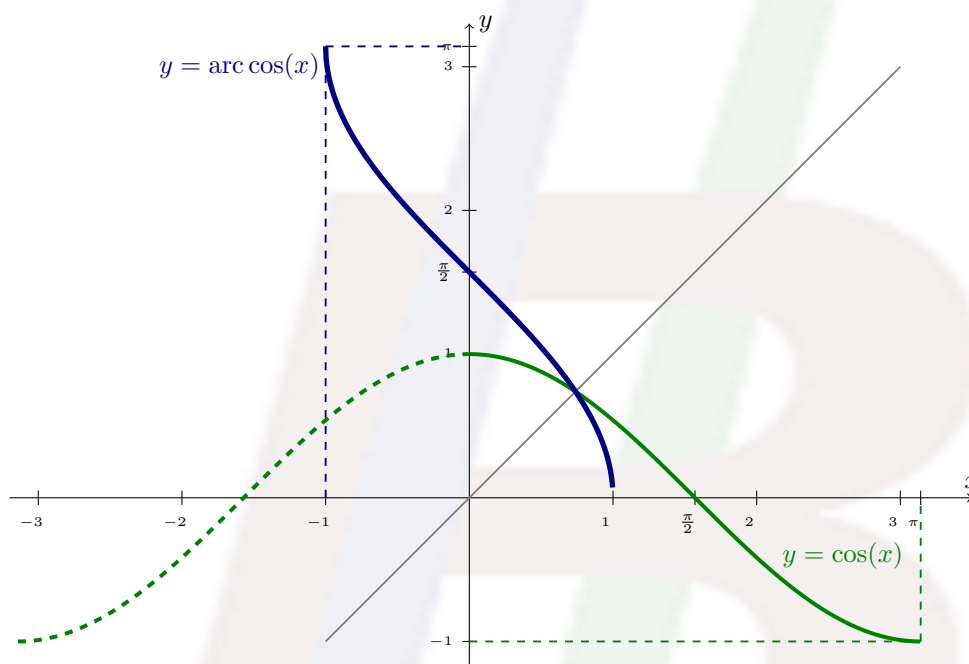
Definicja 5.40. [Funkcja arcus cosinus]

Funkcję odwrotną funkcji $\cos: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ nazywamy *arcusem cosinusem*:

$$\arccos: \begin{cases} \langle -1, 1 \rangle & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arccos(x). \end{cases}$$

Dziedziną funkcji arcus cosinus jest zatem przedział $D_{\arccos} = \langle -1, 1 \rangle$, a zbiór wartości to $W_{\arccos} = \langle 0, \pi \rangle$.

Wykres funkcji *arcus cosinus* (niebieski) powstaje poprzez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$ wykresu zacieśnionej funkcji *cosinus* (zielony).



Bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej otrzymujemy następującą równoważność

$$\arccos x = y \iff \cos y = x \quad \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{ponieważ } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{2\pi}{3} \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Ponadto z faktu, że złożenie funkcji wzajemnie odwrotnych jest identycznością (zob. twierdzenie 4.15) otrzymujemy

$$(\cos \circ \arccos)(x) = \cos(\arccos x) = x \quad \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

oraz

$$(\arccos \circ \cos)(x) = \arccos(\cos x) = x \quad \text{dla } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Lemat 5.41. [Własności funkcji arcus cosinus]

- Funkcja arcus cosinus jest **bijekcją**, czyli w szczególności jest **różnowartościowa**.
- Funkcja arcus cosinus jest funkcją **malejącą** jako funkcja odwrotna malejącego zacieśnienia cosinusa.
- Funkcja arcus cosinus jest funkcją **ograniczoną**, tzn.

$$0 \leq \arccos(x) \leq \pi \quad \text{dla każdego } x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Funkcja arcus cosinus nie jest funkcją parzystą ani nieparzystą, jej wykres nie jest symetryczny ani względem osi Oy , ani względem początku układu współrzędnych!

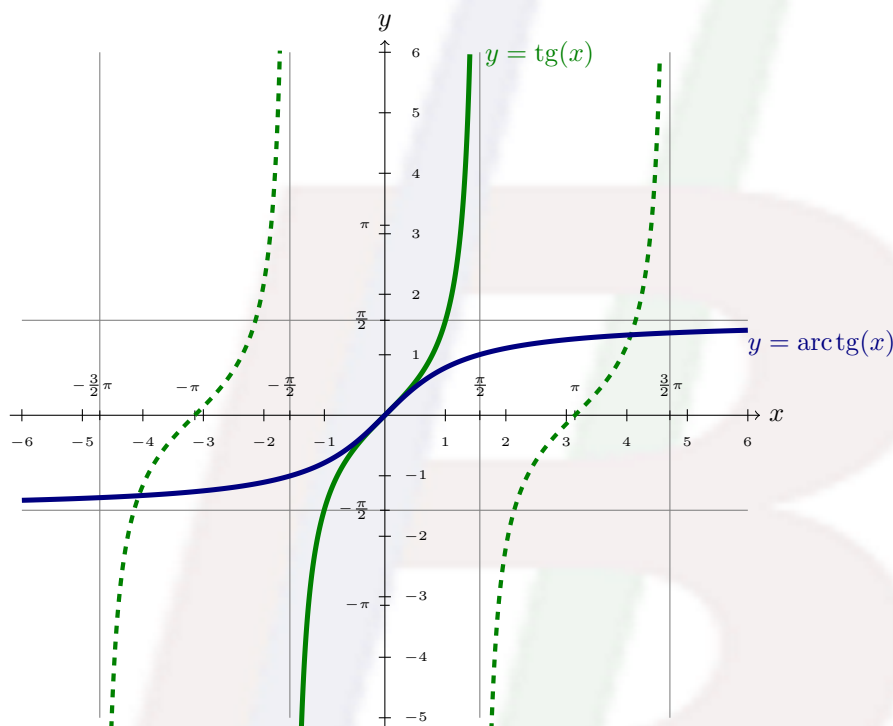
Definicja 5.42. [Funkcja arcus tangens]

Funkcję odwrotną funkcji $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *arcusem tangensem*:

$$\operatorname{arctg}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arctg}(x). \end{cases}$$

Dziedziną funkcji arcus tangens jest zbiór liczb rzeczywistych $D_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$, a zbiór wartości to $W_{\operatorname{arctg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Wykres funkcji *arcus tangens* (niebieski) powstaje poprzez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$ wykresu zacieśnionej funkcji *tangens* (zielony).



Bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej otrzymujemy następującą równoważność

$$\operatorname{arctg} x = y \iff \operatorname{tg} y = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \quad \text{ponieważ } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ponadto z faktu, że złożenie funkcji wzajemnie odwrotnych jest identycznością (zob. twierdzenie 4.15) otrzymujemy

$$(\operatorname{tg} \circ \operatorname{arctg})(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

oraz

$$(\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg})(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$(\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg})(3) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3 - \pi)) = 3 - \pi,$$

ponieważ

$$\operatorname{tg}(3 - \pi) = \operatorname{tg} 3 \quad \text{i} \quad 3 - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Lemat 5.43. [Własności funkcji arcus tangens]

- Funkcja arcus tangens jest **bijekcją**, czyli w szczególności jest **różnowartościowa**.
- Funkcja arcus tangens jest funkcją **rosnącą** jako funkcja odwrotna rosnącego zacieśnienia tangensa.
- Funkcja arcus tangens jest funkcją **nieparzystą**, tzn.

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x) \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcja arcus tangens jest funkcją **ograniczoną**, tzn.

$$|\operatorname{arctg}(x)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Definicja 5.44. [Funkcja arcus cotangens]

Funkcję odwrotną funkcji $\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *arcusem cotangensem*:

$$\operatorname{arcctg}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arcctg}(x). \end{cases}$$

Dziedzina funkcji arcus cotangens jest zbiór liczb rzeczywistych $D_{\operatorname{arcctg}} = \mathbb{R}$, a zbiór wartości to $W_{\operatorname{arcctg}} = (0, \pi)$.

Wykres funkcji arcus cotangens powstaje poprzez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$ wykresu zacieśnionej funkcji cotangens.

Zadanie: Narysować wykres funkcji cotangens i arcus cotangens wykorzystując program GeoGebra.

Bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej otrzymujemy następującą równoważność

$$\operatorname{arcctg} x = y \iff \operatorname{ctg} y = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi).$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{ponieważ } \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \quad \text{i} \quad \frac{5\pi}{6} \in (0, \pi).$$

Ponadto z faktu, że złożenie funkcji wzajemnie odwrotnych jest identycznością (zob. twierdzenie 4.15) otrzymujemy

$$(\operatorname{ctg} \circ \operatorname{arcctg})(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

oraz

$$(\operatorname{arcctg} \circ \operatorname{ctg})(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{dla } x \in (0, \pi).$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6},$$

ponieważ

$$\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{i} \quad \frac{5\pi}{6} \in (0, \pi).$$

Lemat 5.45. [Własności funkcji arcus cotangens]

- Funkcja arcus cotangens jest **bijekcją**, zatem w szczególności jest **różnowartościowa**.
- Funkcja arcus cotangens jest funkcją **malejącą** jako funkcja odwrotna malejącego zacieśnienia cotangensa.

- Funkcja arcus cotangens jest funkcją **ograniczoną**, tzn.

$$0 < \operatorname{arctg}(x) < \pi \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja arcus cotangens nie jest funkcją parzystą ani nieparzystą, jej wykres nie jest symetryczny ani względem osi Oy , ani względem początku układu współrzędnych!

Wykresy funkcji cyklometrycznych otrzymujemy odbijając wykres rozważanej funkcji trygonometrycznej w odpowiednich przedziałach względem prostej o równaniu $y = x$. Oczywiście można odbić wykres całej funkcji trygonometrycznej rozważanej na $\mathbb{R}$, a nie tylko jej zacieśnienia. Otrzymamy wtedy krzywe, które „wiją się” (sinus i cosinus) wokół osi Oy , ale nie będą to wykresy funkcji. Łatwo jednak zauważyć, że można także odwracać funkcje trygonometryczne na innych, niż podane, przedziałach, np. funkcję cosinus rozważaną na przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$. Tak otrzymane funkcje odwrotne różnią się od powyżej zdefiniowanych o stałą i/lub znak. W związku z tym faktem, aby szczególnie wyróżnić powyżej zdefiniowane funkcje cyklometryczne nazywamy je czasami *wartościami głównymi* funkcji cyklometrycznych.

☞ Zachęcamy do eksperymentowania z funkcją sinus i jej zacieśnieniami do różnych przedziałów wykorzystując aplet GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/dzj4dqfj>.

Należy ustawić maksymalny przedział, na którym zacieśnienie sinusa jest iniekcją!

Tożsamości cyklometryczne

Między funkcjami cyklometrycznymi (podobnie jak między funkcjami trygonometrycznymi) zachodzi wiele związków, które przez analogię możemy nazwać *wzorami cyklometrycznymi*.

Niektóre z nich, jak dwie pierwsze tożsamości cyklometryczne podane poniżej, można bardzo łatwo uzasadnić graficznie. Przykładowo, przesuwając „do góry” wykres funkcji arcus sinus o wektor $\vec{v} = [0, \frac{\pi}{2}]$, a następnie przekształcając go przez symetrię osiową względem osi Oy otrzymujemy wykres funkcji arcus cosinus. Podobnie postępując z wykresem funkcji arcus tangens otrzymujemy wykres funkcji arcus cotangens.

Ale też w uzasadnieniu można wykorzystać wzory redukcyjne

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x.$$

Bardziej skomplikowane tożsamości cyklometryczne można uzasadniać wykorzystując rachunek różniczkowy (zob. wykład z *Analizy Matematycznej 1*).

Podstawowe tożsamości dotyczące funkcji cyklometrycznych:

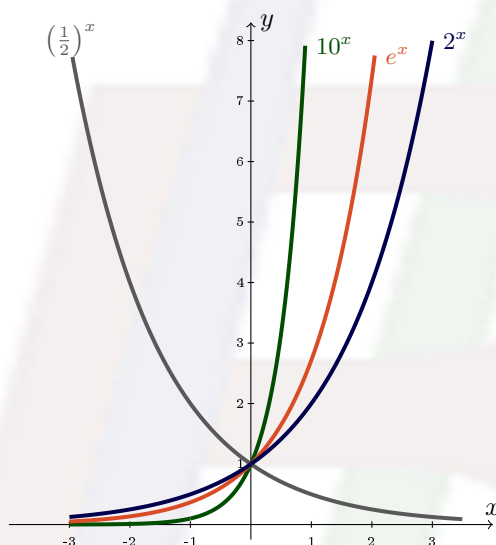
- ❶ $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle.$
- ❷ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$
- ❸ $\operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \cos \sqrt{1 - x^2} \quad \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle.$
- ❹ $\operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{arc} \cos \sqrt{1 - x^2} \quad \text{dla } x \in \langle -1, 0 \rangle.$
- ❺ $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$
- ❻ $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$

5.5 Funkcje wykładnicze

Definicja 5.46. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. *Funkcją wykładniczą* o podstawie a nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \longmapsto & a^x. \end{cases}$$

Szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej jest *funkcja eksponencjalna*, czyli funkcja wykładnicza o podstawie równej liczbie Eulera (Nepera) $e = 2,71828182\dots$ – jednej z najbardziej znanych liczb niewymiernych. Funkcja eksponencjalna ma swoje własne specjalne oznaczenie $e^x = \exp(x)$.



Zauważmy, że wykresy funkcji $y = a^x$ i $y = (\frac{1}{a})^x$ są symetryczne względem osi Oy . Wynika to z zależności $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$.

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności funkcji wykładniczej o szczególnym, praktycznym znaczeniu. Będziemy je często wykorzystywać, między innymi przy rozwiązywaniu **równań i nierówności wykładniczych**.

Własność 5.47. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zatem zbiór liczb rzeczywistych ($D_{\exp} = \mathbb{R}$), natomiast jej zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich ($W_{\exp} = \mathbb{R}_+$).

Innymi słowy, funkcja wykładnicza nigdy nie przyjmuje wartości zero i wartości ujemnych

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad a^x > 0.$$

Zbiór wartości funkcji wykładniczej można opisać jeszcze dokładniej.

Własność 5.48. Niech $f(x) = a^x$ będzie funkcją wykładniczą.

a) Jeśli $0 < a < 1$, to

$$a^x > 1 \iff x < 0$$

oraz

$$0 < a^x < 1 \iff x > 0.$$

b) Jeśli $a > 1$, to

$$a^x > 1 \iff x > 0$$

oraz

$$0 < a^x < 1 \iff x < 0.$$

Własność 5.49. Funkcja wykładnicza jest funkcją **różnowartościową (injekcją)**.

Oznacza to, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków:

$$\text{a) } x_1 \neq x_2 \implies a^{x_1} \neq a^{x_2};$$

$$\text{b) } a^{x_1} = a^{x_2} \implies x_1 = x_2.$$

Różnowartościowość funkcji wykładniczej wykorzystujemy do rozwiązywania *równań wykładniczych*, czyli równań, w których niewiadoma występuje tylko w wykładnikach potęg. Rozwiązywanie równania rozpoczynamy od określenia jego dziedziny, czyli zbioru liczb rzeczywistych, dla których wszystkie wyrażenia mają sens. Następnie najczęściej doprowadzamy obie strony równania do postaci funkcji wykładniczej o tej samej podstawie, a potem korzystamy z warunku b) we Własności 5.49.

Przykład 5.50. Rozwiązać równanie

$$\frac{5^{\frac{8}{x}}}{125} = 25^{\frac{x}{2-x}} \cdot 5^{\frac{x+5}{3-x}}.$$

Rozwiązanie:

- ❶ Określamy dziedzinę równania:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}.$$

- ❷ Przekształcamy równanie w sposób równoważny korzystając z Własności 3.2 operacji potęgowania:

$$\frac{5^{\frac{8}{x}}}{125} = 25^{\frac{x}{2-x}} \cdot 5^{\frac{x+5}{3-x}} \iff \frac{5^{\frac{8}{x}}}{5^3} = 5^{\frac{2x}{2-x}} \cdot 5^{\frac{x+5}{3-x}} \iff 5^{\frac{8}{x}-3} = 5^{\frac{2x}{2-x} + \frac{x+5}{3-x}}.$$

- ❸ Korzystamy teraz z różnowartościowości funkcji wykładniczej $f(x) = 5^x$ (zob. Własność 5.49, warunek b), czyli porównujemy wykładniki potęg po obu stronach powyższego równania:

$$\frac{8}{x} - 3 = \frac{2x}{2-x} + \frac{x+5}{3-x}.$$

- ❹ Rozwiązujemy powyższe równanie wymierne. Jego rozwiązania

$$x_1 = 1 \quad \text{ i } \quad x_2 = \frac{12}{5}$$

należą do wyznaczonej dziedziny i są również rozwiązaniami początkowego równania wykładniczego.

Własność 5.51. Niech $f(x) = a^x$ będzie funkcją wykładniczą.

- a) Jeśli $0 < a < 1$, to f jest funkcją **malejącą**, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- b) Jeśli $a > 1$, to f jest funkcją **rosnącą**, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}.$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

☞ Zachęcamy do sprawdzenia wpływu podstawy funkcji wykładniczej na jej monotoniczność i przebieg wykresu za pomocą apletu GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/Gd3FCGq9>.

Monotoniczność funkcji wykładniczej wykorzystujemy do rozwiązywania *nierówności wykładniczych*, czyli nierówności, w których niewiadoma pojawia się tylko w wykładnikach potęg. Rozwiązywanie nierówności, podobnie jak równania, rozpoczynamy od określenia jego dziedziny, czyli zbioru liczb rzeczywistych, dla których wszystkie wyrażenia mają sens. Następnie najczęściej doprowadzamy obie strony nierówności do postaci funkcji wykładniczej o tej samej podstawie, a potem korzystamy z odpowiednich warunków w Własności 5.51.

Przykład 5.52. Rozwiązać nierówność

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1} \cdot 16^{x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8}.$$

Rozwiązanie:

- ❶ Określamy dziedzinę nierówności:

$$D = \mathbb{R}.$$

- ❷ Przekształcamy nierówność w sposób równoważny korzystając z Własności 3.2 operacji potęgowania:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{64}\right)^{x-1} \cdot 16^{x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8} &\iff \left(\frac{1}{4^3}\right)^{x-1} \cdot (4^2)^{x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8} \iff \\ &\iff \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8} \iff \\ &\iff \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-3-2x+8} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8} \iff \left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8}. \end{aligned}$$

- ❸ Korzystamy teraz z faktu, że funkcja wykładnicza $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ jest malejąca (zob. Własność 5.51, warunek a), czyli porównujemy wykładniki potęg po obu stronach powyższej nierówności pamiętając o zmianie nierówności na przeciwną:

$$x + 5 > 4x + 8$$

- ❹ Rozwiązujemy powyższą nierówność liniową

$$x + 5 > 4x + 8 \iff -3x > 3 \iff x < -1.$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział

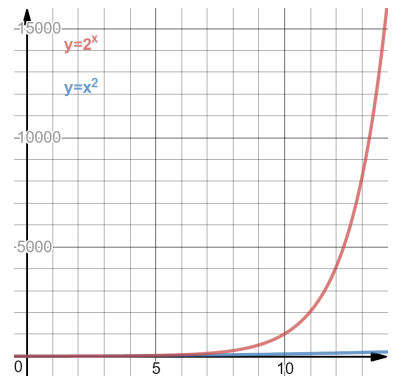
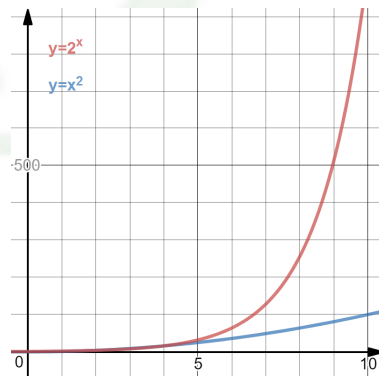
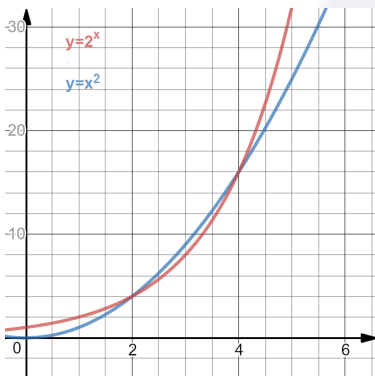
$$(-\infty, -1) \subseteq \mathbb{R}.$$

Uwaga 5.53. Przekształcenia w podpunkcie ❷ można wykonać także w inny sposób:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{64}\right)^{x-1} \cdot 16^{x-4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+8} &\iff (4^{-3})^{x-1} \cdot (4^2)^{x-4} < (4^{-1})^{4x+8} \iff \\ &\iff 4^{-3x+3} \cdot 4^{2x-8} < 4^{-4x-8} \iff 4^{-x-5} < 4^{-4x-8}, \end{aligned}$$

a następnie skorzystać z faktu, że funkcja wykładnicza $f(x) = 4^x$ jest rosnąca (zob. Własność 5.51, warunek b).

Uwaga 5.54. Funkcja wykładnicza dla $a > 1$ rośnie bardzo szybko, szybciej niż jakakolwiek funkcja potęgowa. Poniższe rysunki porównują funkcję wykładniczą $y = 2^x$ z funkcją kwadratową $y = x^2$. Proszę zwrócić uwagę jak zmienia się zakres argumentów i wartości na kolejnych rysunkach (na ostatnim rysunku wykres funkcji kwadratowej praktycznie pokrywa się z osią Ox !).



5.5.1 Zastosowania funkcji wykładniczej

Dlaczego tyle czasu poświęcamy badaniu funkcji wykładniczej? Odpowiedź jest prosta. Z jej pomocą modelujemy wiele zjawisk zachodzących w życiu codziennym, choć nie zawsze zdajemy sobie z tego sprawę.

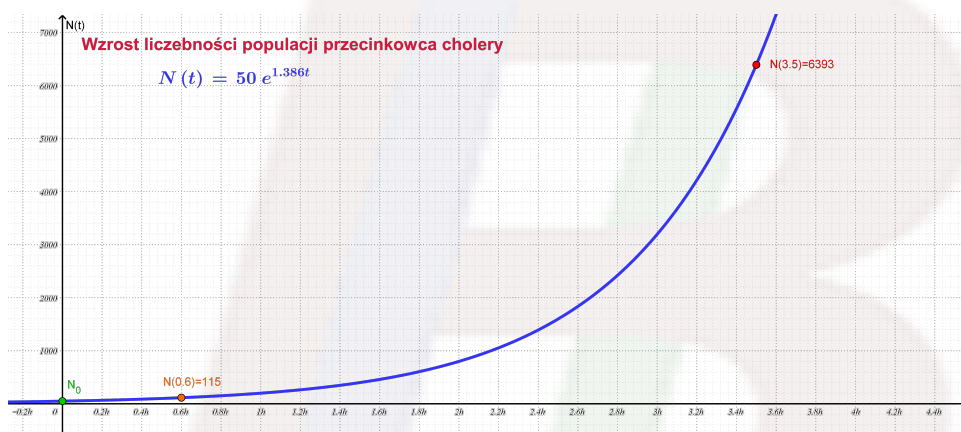
Funkcję wykładniczą wykorzystujemy do opisu wielkości, które zmieniają się w stałym tempie. Oznacza to, że w kolejnych odcinkach czasu zwiększają się lub zmniejszają tyle samo razy lub o ten sam procent. Przyrost w tempie wykładniczym od pewnego momentu jest zdecydowanie szybszy niż wzrost liniowy, natomiast spadek wykładniczy jest wolniejszy niż spadek w tempie liniowym. Z wzrostem i spadkiem wykładniczym mamy do czynienia przede wszystkim w biologii, chemii, demografii, ekonomii i socjologii.

Przykład 5.55. [Liczebność populacji przecinkowca cholery]

Cholera, zakaźna choroba przewodu pokarmowego, spowodowana jest najczęściej bakteriami przecinkowca cholery. Bakterie te rozmnażają się wegetatywnie poprzez podział komórki w tempie wykładniczym, który możemy opisać w sposób przybliżony wzorem

$$N(t) = N_0 \cdot e^{1,386 \cdot t},$$

gdzie N_0 to początkowa liczba bakterii w obserwowanej kolonii, $N(t)$ oznacza liczebność populacji bakterii w chwili t , a stała 1,386 jest charakterystyczna dla bakterii przecinkowca cholery.



Założmy, że badana przez nas kolonia przecinkowca cholery na początku obserwacji składa się z 50 bakterii. Oznacza to, że po 0,6 godzinach kolonia przecinkowca będzie składała się z

$$N(0,6) = 50 \cdot e^{1,386 \cdot 0,6} = 50 \cdot e^{0,8316} = 50 \cdot 2,2969 \approx 115 \text{ bakterii,}$$

Natomiast po 3,5 godzinach w badanej kolonii będzie

$$N(3,5) = 50 \cdot e^{1,386 \cdot 3,5} = 50 \cdot e^{4,851} = 50 \cdot 127,868 \approx 6393 \text{ bakterii.}$$

☞ Zachęcamy do samodzielnych eksperymentów z wykorzystaniem apletu GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/gYJPgU6R>.

Oczywiście, od razu nasuwa się pytanie, skąd wiadomo, ile równa jest stała charakteryzująca rozmnażanie danego szczepu bakterii. Otóż najczęściej otrzymujemy ją w sposób eksperymentalny, poprzez obserwację. Fachowo nazywa się to wyznaczaniem *wykładniczej krzywej regresji* $N(t) = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$. Załóżmy przykładowo, że co godzinę liczba bakterii w kolonii wzrasta o 20%. Wtedy liczebność populacji w chwili t obliczymy ze wzoru

$$N(t) = N_0 \cdot 1,2^t = N_0 \cdot e^{t \cdot \ln(1,2)} \approx N_0 \cdot e^{0,1823 \cdot t}.$$

Do tego tematu jeszcze wrócimy.

Oczywiście, musimy pamiętać, że model opisany powyższym wzorem nie oddaje w pełni realnej sytuacji. Bakterie rzeczywiście namnażają się bardzo szybko. W sprzyjających warunkach, niektóre mogą się dzielić nawet co 20 minut. Na szczęście dla nas rozmnażanie w tempie wykładniczym nie trwa w nieskończoność. Po jakimś czasie dochodzi do stanu względnej równowagi, ponieważ najczęściej pojawiają się czynniki ograniczające, takie jak duże nagromadzenie produktów rozkładu lub wyczerpanie się pożywienia.

To samo dotyczy innych zjawisk zmieniających się tempie wykładniczym, jak przebieg epidemii czy zasięg sieci społecznościowych w internecie. Nie mogą one wzrastać nieprzerwanie, bowiem zawsze istnieją ograniczenia środowiska czy przestrzeni, w której zachodzą badane procesy.

Przykład 5.56. [Prawo rozpadu naturalnego]

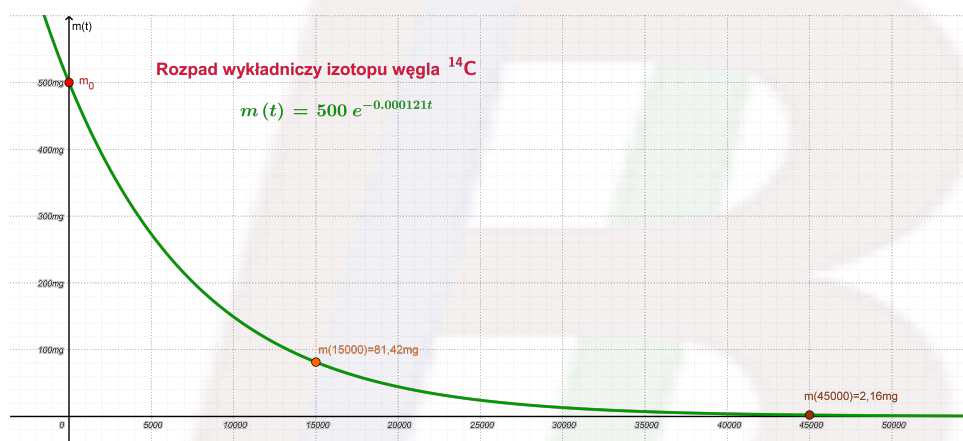
W przyrodzie naturalnie występują trzy izotopy węgla: ^{12}C i ^{13}C są stabilne, natomiast izotop ^{14}C jest promieniotwórczy. Węgiel ^{14}C jest efektem przemiany azotu ^{14}N pod wpływem neutronów promieniowania kosmicznego. Izotop ten jest następnie utleniany do dwutlenku węgla, który wchodzi poprzez fotosyntezę do organicznego obiegu węgla w przyrodzie. Organizm, dopóki żyje, wymienia materię z otoczeniem i stosunek węgla radioaktywnego do stabilnego jest podobny do tego w atmosferze. Po śmierci organizmu wymiana materii ustaje i sytuacja zmienia się. Zawartość izotopu stabilnego ^{12}C pozostaje stała, natomiast izotop radioaktywny ^{14}C ulega rozpadowi zgodnie z *prawem rozpadu naturalnego*

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730} \cdot t} = m_0 \cdot e^{-0,000121 \cdot t},$$

gdzie m_0 oznacza zawartość (masę lub liczbę atomów) izotopu w próbce pobranej w chwili ($t = 0$) śmierci organizmu, a $m(t)$ to zawartość izotopu po t latach.

Stała $T_{\frac{1}{2}} = 5730 \pm 40$ to *czas połowicznego rozpadu* izotopu ^{14}C , czyli czas, po którym $m(t) = \frac{1}{2} m_0$. Natomiast stała $\lambda = 0,000121$ nazywana jest *eksponencjalną stałą rozpadu*.

Wzór z czasem rozpadu połowicznego, czyli w postaci funkcji wykładniczej o podstawie $\frac{1}{2}$, jest bardziej intuicyjną charakterystyką prawa rozpadu naturalnego.



Założmy teraz, że w chwili śmierci organizmu w badanej jego próbce było $m_0 = 500$ mg izotopu ^{14}C . Oznacza to, że po 15 000 lat w próbce tej będzie

$$m(15\,000) = 500 \cdot e^{-0,000121 \cdot 15\,000} = 500 \cdot e^{-1,815} \approx 81,42 \text{ mg}$$

izotopu ^{14}C , a po 45 000 lat:

$$m(45\,000) = 500 \cdot e^{-0,000121 \cdot 45\,000} = 500 \cdot e^{-5,445} \approx 2,16 \text{ mg}.$$

📖 Zachęcamy do samodzielnych eksperymentów z wykorzystaniem apletu GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/T8KwWEAx>.

Wzór opisujący prawo rozpadu naturalnego obowiązuje przy założeniu, że prawdopodobieństwo rozpadu cząstek tworzących izotop jest dla każdej z nich jednakowe i niezależne oraz nie zmienia się w czasie trwania procesu.

Oczywiście, czas rozpadu połowicznego, a zatem także stała rozpadu jest dla każdego izotopu inna. Przykładowo, czas połowicznego rozpadu dla polonium ^{210}Po wynosi około 138 dni.

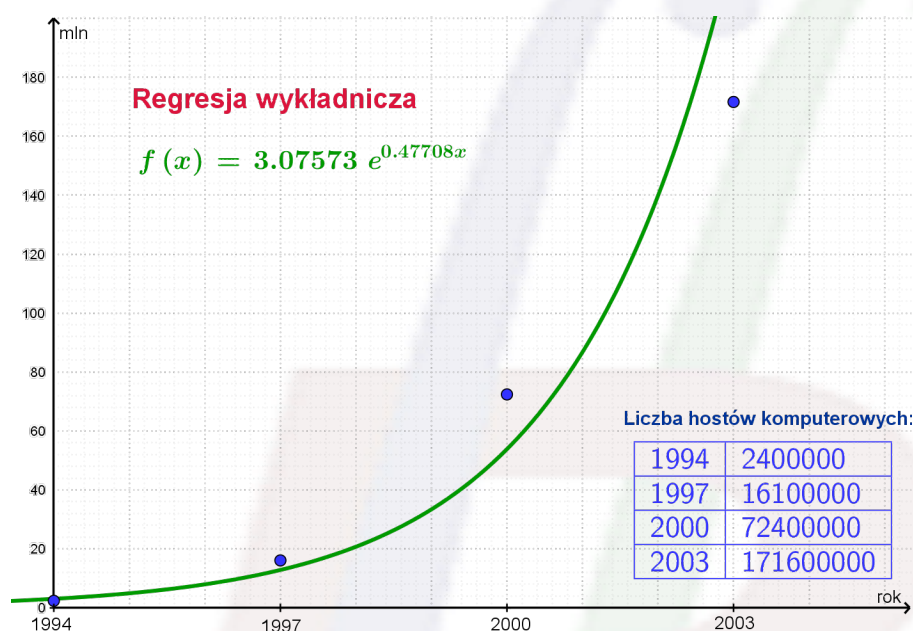
Prawo rozpadu naturalnego jest używane w tak zwanym *datowaniu radiowęglowym*, czyli metodzie badania wieku wykorzystującej pomiar stosunku izotopu promieniotwórczego ^{14}C do izotopu stabilnego ^{12}C zawartych w próbce. Proszę zastanowić się, jak przeprowadza się obliczenia w tej metodzie i dlaczego używa się izotopu węgla, a nie na przykład polonium.

Przykład 5.57. [Regresja wykładnicza]

W latach 90-tych XX wieku nastąpił gwałtowny rozwój internetu i dostępu do niego. Poniższa tabela przedstawia liczbę hostów komputerowych (w milionach):

1994	2,4
1997	16,1
2000	72,4
2003	171,6

Jeśli założymy, że wzrost jest wykładniczy, to jak wyznaczyć funkcję, która najlepiej go opisuje? Z pomocą przychodzą nam programy komputerowe. Na poniższym rysunku można zobaczyć efekt działania programu GeoGebra i polecenia: *Regresja Wykładnicza(<ListaPunktów>)*. Rok 1994 jest początkiem obserwacji, a argument x oznacza liczbę lat, które upłynęły od tego roku.



Co, na podstawie tej funkcji, można powiedzieć o obecnej liczbie hostów komputerowych? Czy zgadza się ona z rzeczywistością?

☞ Zachęcamy do samodzielnych eksperymentów z wykorzystaniem apletu GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/wTTQT4Ya>.

5.6 Funkcje logarytmiczne

5.6.1 Logarytmy

Określimy najpierw pojęcie logarytmu. Nasze rozważania rozpoczniemy od twierdzenia:

Twierdzenie 5.58. [o istnieniu logarytmów]

Niech $x, a \in \mathbb{R}$. Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$ i $x > 0$, to istnieje **dokładnie jedna** liczba $y \in \mathbb{R}$ taka, że $a^y = x$.

Wynika z niego poprawność poniższej definicji.

Definicja 5.59. Niech $x, a \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$ i $a > 0$, $a \neq 1$. *Logarytmem* przy podstawie a z liczby x nazywamy taką liczbę $y \in \mathbb{R}$, że $a^y = x$ i oznaczamy ją symbolem $\log_a x$, czyli

$$a^y = x \iff y = \log_a x.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.60. Dla dowolnej podstawy $a > 0$, $a \neq 1$ i dowolnej liczby $x > 0$ mamy:

L1: $\log_a 1 = 0$, ponieważ $a^0 = 1$;

L2: $\log_a a = 1$, ponieważ $a^1 = a$;

L3: $\log_a \frac{1}{a} = -1$, ponieważ $a^{-1} = \frac{1}{a}$;

L4: $a^{\log_a x} = x$ oraz $\log_a a^x = x$ wprost z definicji logarytmu.

Przykład 5.61. Zgodnie z poprzednim wnioskiem mamy:

$$\log_5 1 = 0, \quad \log_{\frac{1}{5}} 5 = -1, \quad \log_3 3^{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, \quad 4^{\log_4 \pi} = \pi.$$

Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania ze względu na wykładnik potęgi. Obliczenie logarytmu oznacza, kolokwialnie mówiąc, ustalenie, do której potęgi trzeba podnieść podstawę logarytmu a , aby w wyniku otrzymać liczbę x .

Logarytm, którego podstawą jest liczba 10, nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i oznaczamy symbolem $\log$. Natomiast logarytm, którego podstawą jest liczba e , nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy symbolem $\ln$:

$$\log x := \log_{10} x \quad \text{i} \quad \ln x := \log_e x.$$

Wynika stąd przykładowo, że

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3 \quad \text{oraz} \quad e^{\ln 2} = 2.$$

Z własności operacji potęgowania można wyprowadzić następujące prawa działań na logarytmach.

Własności 5.62. Niech $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a > 0$, $a \neq 1$.

L5: *Logarytm iloczynu:*

Jeśli $x > 0$, $y > 0$, to

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

L6: *Logarytm ilorazu:*

Jeśli $x > 0$, $y > 0$, to

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

L7: *Logarytm potęgi:*

Jeśli $x > 0$, to

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

L8: Jeśli $x > 0$ i $y \neq 0$, to

$$\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \cdot \log_a x.$$

L9: Jeśli $b > 0$, $b \neq 1$, to

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

L10: Zamiana podstawy logarytmu:

Jesli $b > 0$, $b \neq 1$ i $x > 0$, to

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Przykład 5.63. Korzystając z podanych wyżej własności obliczamy:

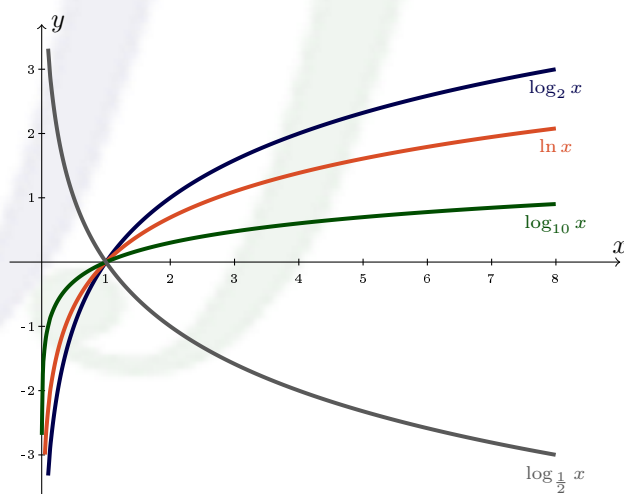
- ❶ $\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} \stackrel{\text{L7}}{=} -3 \cdot \log_5 5 \stackrel{\text{L2}}{=} -3.$
- ❷ $\log_{\frac{1}{7}} 49\sqrt{7} = \log_{\frac{1}{7}} 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{7}} 7^{\frac{5}{2}} = \log_{7^{-1}} 7^{\frac{5}{2}} \stackrel{\text{L8}}{=} -1 \cdot \log_7 7^{\frac{5}{2}} \stackrel{\text{L7}}{=} -1 \cdot \frac{5}{2} \cdot \log_7 7 \stackrel{\text{L2}}{=} -\frac{5}{2}.$
- ❸ $5 \log_3 6 - 2 \log_3 4 - \log_3 18 \stackrel{\text{L7}}{=} \log_3 6^5 - (\log_3 4^2 + \log_3 18) \stackrel{\text{L5}}{=} \log_3 6^5 - \log_3 (4^2 \cdot 18) \stackrel{\text{L6}}{=} \\ = \log_3 \frac{6^5}{4^2 \cdot 18} = \log_3 \frac{2^5 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 2 \cdot 3^2} = \log_3 3^3 \stackrel{\text{L4}}{=} 3.$
- ❹ $\frac{\log_5 256 - \log_5 16}{\log_5 8 - \log_5 2} \stackrel{\text{L6}}{=} \frac{\log_5 \frac{256}{16}}{\log_5 \frac{8}{2}} = \frac{\log_5 16}{\log_5 4} \stackrel{\text{L10}}{=} \log_4 16 = \log_4 4^2 \stackrel{\text{L4}}{=} 2.$

5.7 Definicja i własności funkcji logarytmicznej

Funkcja logarytmiczna (a właściwie rodzina funkcji logarytmicznych o różnych podstawach) jest jedną z *podstawowych funkcji elementarnych*.

Definicja 5.64. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. *Funkcją logarytmiczną* o podstawie a nazywamy funkcję określoną wzorem

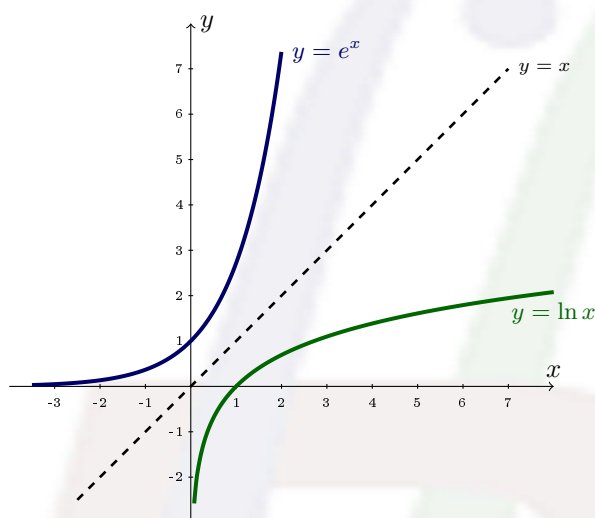
$$f: \begin{cases} (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a x. \end{cases}$$



Zauważmy, że wykresy funkcji $f(x) = \log_a x$ i $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ są symetryczne względem osi Ox . Wynika to z zależności (L8) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ we Własnościach 5.62.

Bezpośrednio z definicji funkcji logarytmicznej dostajemy

Wniosek 5.65. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Jeśli $f(x) = \log_a x$ jest funkcją logarytmiczną o podstawie a oraz $g(x) = a^x$ jest funkcją wykładniczą o tej samej podstawie a , to $f = g^{-1}$.



Inaczej mówiąc, funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną funkcji wykładniczej o tej samej podstawie i na odwrót, a ich wykresy są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

☞ Zachęcamy do sprawdzenia tego faktu dla różnych podstaw wykorzystując aplet GeoGebry: <https://www.geogebra.org/m/aFUeCC9y>.

Złożenie funkcji logarytmicznej z funkcją wykładniczą o tej samej podstawie jest zatem identycznością, czyli

$$f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}} \quad \text{oraz} \quad g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_+}.$$

Zapisując powyższe równości z zastosowaniem argumentów dostajemy znane nam już tożsamości (L4) we Wniosku 5.60.

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności funkcji logarytmicznej o szczególnym, praktycznym znaczeniu. Będziemy je często wykorzystywać, między innymi przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych.

Własność 5.66. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich ($D_{\log} = (0, +\infty)$), natomiast jej zbiorem wartości jest cały zbiór liczb rzeczywistych ($W_{\log} = \mathbb{R}$).

Funkcja logarytmiczna ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x = 1$ dla każdej podstawy a :

$$f(x) = \log_a x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

Zbiór wartości funkcji logarytmicznej można opisać jeszcze dokładniej.

Własność 5.67. Niech $f(x) = \log_a x$ będzie funkcją logarytmiczną.

a) Jeśli $0 < a < 1$, to

$$\log_a x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

oraz

$$\log_a x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 1.$$

b) Jeśli $a > 1$, to

$$\log_a x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

oraz

$$\log_a x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 1.$$

Własność 5.68. Funkcja logarytmiczna jest funkcją **różnowartościową (iniekcją)**.

Oznacza to, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków:

a) $x_1 \neq x_2 \implies \log_a x_1 \neq \log_a x_2;$

b) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \implies x_1 = x_2.$

Różnowartościowość funkcji logarytmicznej wykorzystujemy do rozwiązywania *równań logarytmicznych*, czyli równań, w których niewiadoma występuje tylko jako argument logarytmu lub w jego podstawie. Rozwiązywanie równania rozpoczynamy od określenia jego dziedziny, czyli zbioru liczb rzeczywistych, dla których wszystkie wyrażenia mają sens. Następnie najczęściej doprowadzamy obie strony równania do postaci funkcji logarytmicznej o tej samej podstawie, a potem korzystamy z warunku b) we Własności 5.68. Przykładowo, jeśli $\log_2 x = \log_2 \frac{1}{8}$, to $x = \frac{1}{8}$.

Przykład 5.69. Rozwiązać równanie

$$\log_3(x+3) + 1 = \log_3(x+2).$$

Rozwiązanie:

- ❶ Określamy dziedzinę równania:

$$D = (-2, +\infty)$$

uwzględniając warunki: $x+2 > 0$ i $x+3 > 0$.

- ❷ Przekształcamy równanie w sposób równoważny korzystając z Wniosku 5.60 i Własności 5.62 operacji logarytmowania:

$$\log_3(x+3)+1 = \log_3(x+2) \iff \log_3(x+3)+\log_3 3 = \log_3(x+2) \iff \log_3 3(x+3) = \log_3(x+2).$$

- ❸ Korzystamy teraz z różnowartościowości funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_3 x$ (zob. Własność 5.68, warunek b), czyli porównujemy argumenty logarytmów po obu stronach powyższego równania:

$$3(x+3) = x+2.$$

- ❹ Rozwiązujemy powyższe równanie liniowe. Jego rozwiązanie

$$x = -\frac{7}{2}$$

nie należy jednak do wyznaczonej dziedziny. Wynika stąd, że początkowe równanie logarytmiczne jest sprzeczne.

Własność 5.70. Niech $f(x) = \log_a x$ będzie funkcją logarytmiczną o podstawie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- a) Jeśli $0 < a < 1$, to f jest funkcją **malejącą**, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- b) Jeśli $a > 1$, to f jest funkcją **rosnącą**, tzn.

$$x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

dla wszystkich liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Monotoniczność funkcji logarytmicznej wykorzystujemy do rozwiązywania *nierówności logarytmicznych*, czyli nierówności, w których niewiadoma pojawia się tylko jako argument logarytmu lub w jego podstawie. Rozwiązanie nierówności, podobnie jak równania, rozpoczynamy od określenia jego dziedziny, czyli zbioru liczb rzeczywistych, dla których wszystkie wyrażenia mają sens. Następnie najczęściej doprowadzamy obie strony nierówności do postaci funkcji logarytmicznej o tej samej podstawie, a potem korzystamy z odpowiednich warunków w Własności 5.70. Przykładowo, jeśli $\log_2 x > \log_2 8$, to $x > 8$ lub jeśli $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$, to $x \geq 16$.

Przykład 5.71. Rozwiązać nierówność

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+1) + 2\log_4 x > -\frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

- ❶ Określamy dziedzinę nierówności:

$$D = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$$

uwzględniając warunki $x+1 > 0$ i $x > 0$.

- ❷ Przekształcamy nierówność w sposób równoważny korzystając z Wniosku 5.60 i Własności 5.62 operacji logarytmowania:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}}(x+1) + 2\log_4 x > -\frac{1}{2} &\iff \log_{\frac{1}{4}}(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \iff \\ &\iff \log_{\frac{1}{4}}(x+1) - \log_{\frac{1}{4}} x^2 > \log_{\frac{1}{4}} 2 \iff \\ &\iff \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{x^2} > \log_{\frac{1}{4}} 2. \end{aligned}$$

- ❸ Korzystamy teraz z faktu, że funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ jest malejąca (zob. Własność 5.70, warunek a), czyli porównujemy argumenty logarytmów po obu stronach powyższej nierówności pamiętając o zmianie nierówności na przeciwną:

$$\frac{x+1}{x^2} < 2$$

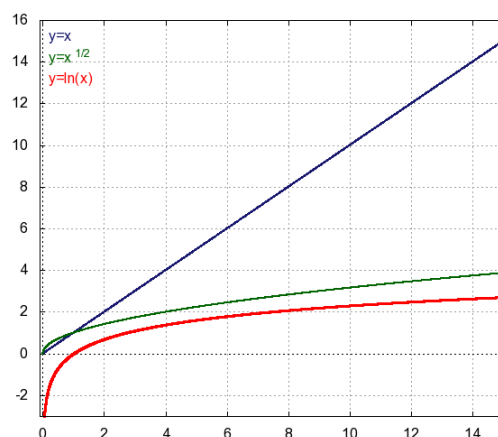
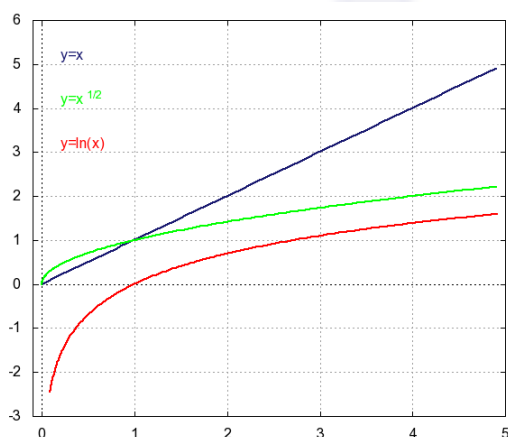
- ❹ Rozwiązujemy powyższą nierówność wymierną

$$\frac{x+1}{x^2} < 2 \iff 2x^2 - x - 1 > 0 \iff 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1) > 0 \iff x \in \left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)\right).$$

Uwzględniając wcześniej wyznaczoną dziedzinę otrzymujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności logarytmicznej jest przedział

$$(1, +\infty).$$

Uwaga 5.72. Funkcja logarytmiczna o podstawie $a > 1$ jest rosnąca. Rośnie jednak bardzo powoli, co można zaobserwować na poniższych rysunkach porównujących ją z funkcją $y = x$ i $y = \sqrt{x}$.



5.8 Pewne funkcje nieelementarne

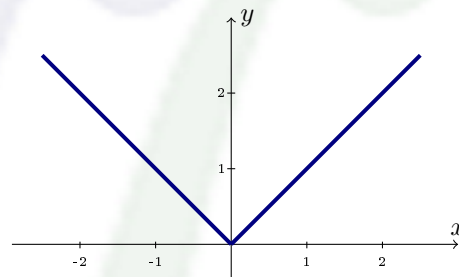
Przykład 5.73. Przedstawione poniżej funkcje są zdefiniowane dla wszystkich liczb rzeczywistych.

❶ Wartość bezwzględna

$$|\cdot|: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto |x|, \end{cases}$$

przy czym liczba $|x|$ zdefiniowana została w Def. 2.14.

Zbiór wartości: $W_{|\cdot|} = [0, \infty)$.

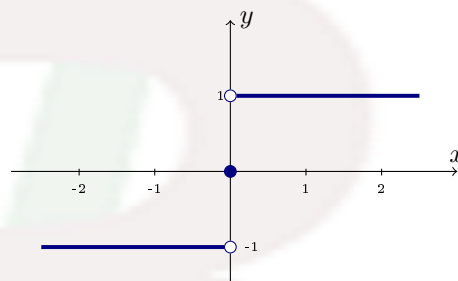


❷ Funkcja signum

$$\text{sgn}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \text{sgn}(x), \end{cases}$$

przy czym liczba $\text{sgn}(x)$ została zdefiniowana w Def. 2.18.

Zbiór wartości: $W_{\text{sgn}} = \{-1, 0, 1\}$

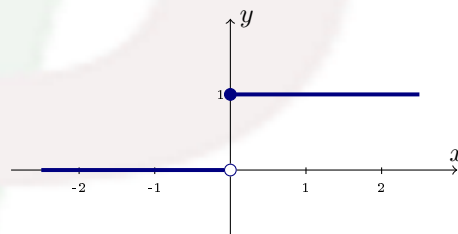


❸ Funkcja skokowa Heaviside'a

$$H: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Zbiór wartości: $W_H = \{0, 1\}$

Funkcja ta jest używana w przetwarzaniu sygnałów, w elektrotechnice i elektronice, w automatyce, a także w mechanice.



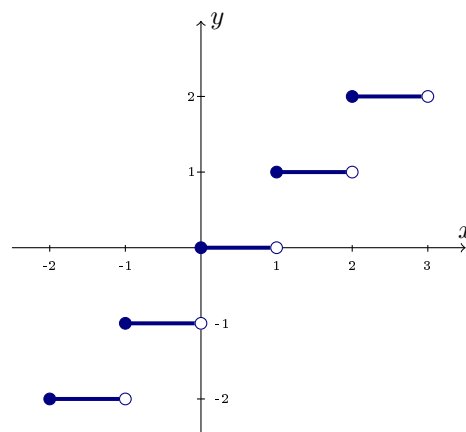
❹ Część całkowita (cecha)

$$E: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto [x], \end{cases}$$

gdzie $[x] := m \in \mathbb{Z}$ dla $x \in [m, m+1)$.

Inaczej mówiąc $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ jest największą liczbą całkowitą nie większą niż x .

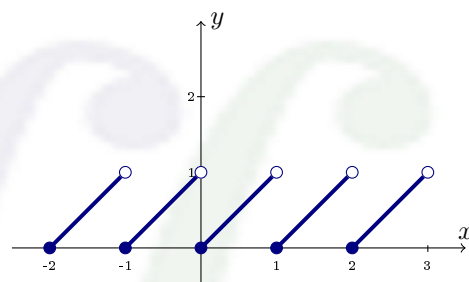
Zbiór wartości: $W_E = \mathbb{Z}$.



⑤ *Część ułamkowa (mantysa)*

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x - [x], \end{cases}$$

Zbiór wartości: $W_f = [0, 1)$.



⑥ *Funkcja Dirichleta* to funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych

$$D: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Zbiór wartości: $W_D = \{0, 1\}$.

⑦ *Funkcja Riemanna*

$$R: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q} \text{ (ułamek nieskracalny)}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

W szczególności $R(x) = 1$ dla wszystkich argumentów całkowitych, ponieważ dla każdej liczby całkowitej x skróconą postacią ułamka $\frac{p}{q}$ jest $\frac{x}{1}$.

Zbiór wartości: $W_R = \{0\} \cup \{\frac{1}{q} : q \in \mathbb{N}^*\}$.

Część II

Ciągi liczbowe

6 Definicja ciągu liczbowego i przykłady

Definicja 6.1. Funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych

$$a: \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto a(n) = a_n \end{cases}$$

nazywamy *ciągą liczbowym* lub po prostu *ciągą*.

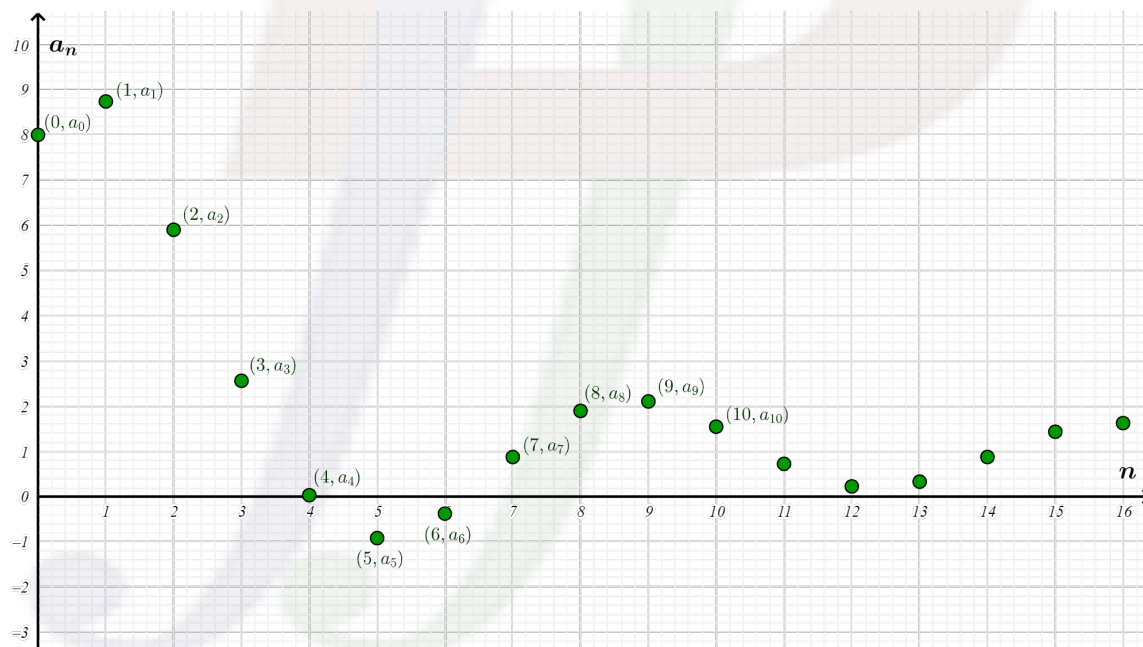
Oznaczenia:

$$(a_n), \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n \geq 0}, \quad (a_n)_{n=0}^{\infty}, \quad (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

- Parę uporządkowaną $(n, a(n))$, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *n-tym wyrazem* ciągu (a_n) , liczbę n *wskaznikiem*, a $a(n)$ *wartością* tego wyrazu. Krótko piszemy a_n zamiast $a(n)$.
- Pierwszy wyraz ciągu będziemy nazywać *wyrazem początkowym*.

Ciąg, jak każda funkcja, może zostać zilustrowany w układzie współrzędnych, w którym poziomą oś argumentów (indeksów) oznaczmy symbolem n , a pionową oś wartości symbolem a_n . Wykres ciągu nie jest linią, ale składa się z punktów będących wyrazami ciągu, czyli o współrzędnych (n, a_n) dla $n \in \mathbb{N}$.

Na podstawie wykresu ciągu można wyrobić sobie intuicję na temat jego własności.



Czasami ciąg ilustruje się tylko z wykorzystaniem jego wartości, czyli jako indeksowane punkty a_n na osi rzeczywistej.

Bardzo często wygodniej nam będzie numerować wyrazy ciągu zaczynając nie od $n = 0$, ale od $n = 1$: $(a_n)_{n \geq 1}$, czyli rozważać funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Czasami ze względów praktycznych numerację będziemy zaczynać od innej liczby naturalnej k : $(a_n)_{n \geq k}$.

Wskaznik n może też być oznaczany innymi literami, np. $m, k, l, \dots$

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ musimy odróżniać od zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_0, a_1, a_1, \dots\}$. Najlepiej można to uzasadnić rozpatrując ciąg *stały*, zdefiniowany wzorem $a_n := a \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a, a, \dots)$ ma nieskończenie wiele wyrazów, natomiast do zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$ należy tylko jeden element.

W ciągu ważna jest kolejność wyrazów ciągu, natomiast elementy zbioru możemy wypisywać w dowolnej kolejności.

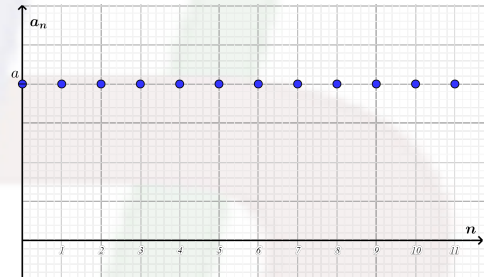
Ciągi liczbowe można zdefiniować na różnorodne sposoby. Najważniejsze z nich omówimy na przykładach.

Przykład 6.2.

- Ciąg liczbowy można zdefiniować *explicit*, tzn. określając *jawnym wzorem* postać funkcji $a(n)$, np.:

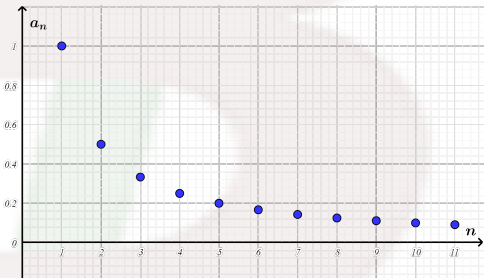
- ❶ Ciąg *stały*: $a_n = a$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a, a, \dots)$$



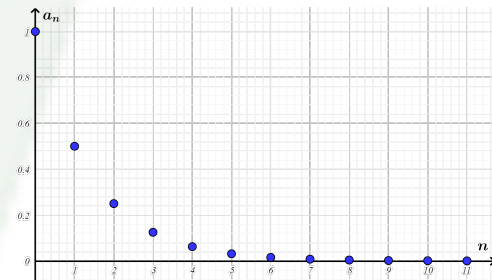
- ❷ Ciąg *harmoniczny*: $a_n = \frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$(a_n)_{n>0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$



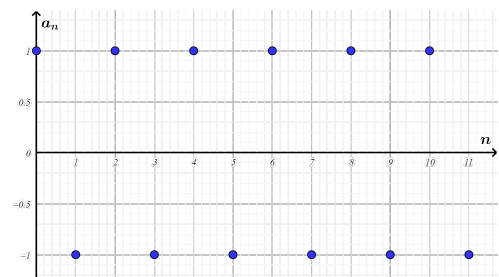
- ❸ Ciąg *geometryczny*: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$



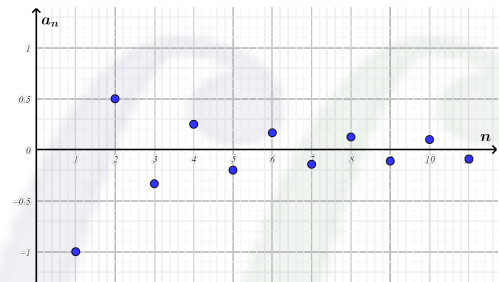
- ❹ Ciąg *naprzemienny*: $a_n = (-1)^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$



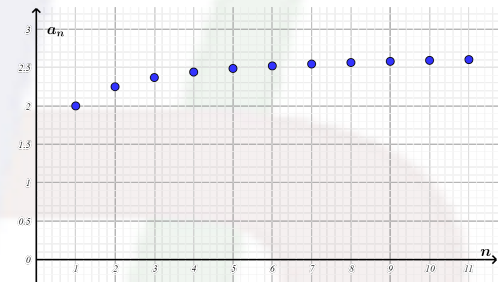
- ⑤ Ciąg *naprzemienny harmoniczny*: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, czyli

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$



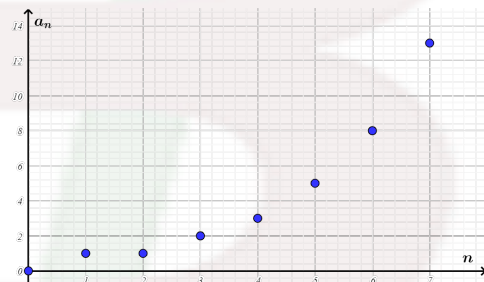
- ⑥ Ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, czyli, czyli

$$(a_n)_{n>0} = \left(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\right)$$



- ⑦ Ciąg *Fibonacciego*:¹ $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$$



- Ciąg może też być zdefiniowany *rekurencyjnie*, tzn. musimy znać pewne wyrazy ciągu aż do a_{n-1} , aby za pomocą *wzoru rekurencyjnego* obliczyć wyraz a_n , np.:

- ① Ciąg *Fibonacciego* $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ jest również określony wzorem

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

- ② Ciąg $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \dots\right)$ jest zdefiniowany wzorem

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

- ③ Ciąg *geometryczny* $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ o ilorazie $q = 2$ jest zdefiniowany wzorem

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

- ④ Ciąg *arytmetyczny* $(1, 4, 7, 10, 13, \dots)$ o różnicy $r = 3$ jest zdefiniowany wzorem

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

¹Leonardo z Pizy zwany Fibonaccim (ok. 1175 – po 1240), matematyk włoski, wprowadził do Europy cyfry arabskie.

- Czasami nie można lub bardzo trudno jest określić ciąg wzorami matematycznymi, wtedy można zdefiniować ciąg **opisowo**, tzn. podać „przepis” wyznaczania jego wyrazów, np.:
 - ❶ a_n jest n -tą liczbą pierwszą;
 - ❷ a_n jest n -tą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{2}$;
 - ❸ a_n jest sumą wszystkich liczb pierwszych mniejszych od n , gdzie przyjmujemy $a_1 = a_2 = 0$.
- Jeżeli wyrazy ciągu otrzymujemy poprzez obserwację lub pomiary np. notowania na giełdzie lub temperatura powietrza o danej godzinie, to podanie jakiegokolwiek wzoru lub przepisu nie jest możliwe. W tym przypadku musimy wypisywać wszystkie wyrazy danego ciągu. Z wiadomych względów takich ciągów nie będziemy rozważać w tych notatkach.

Omówimy teraz dokładniej dwa rodzaje ciągów, które częściej będą się pojawiać podczas zajęć z matematyki.

6.1 Ciąg arytmetyczny

Definicja 6.3. [Ciąg arytmetyczny]

Niech $a, r \in \mathbb{R}$ będą ustalonymi liczbami. Ciąg $(a_n)_{n>0}$ zdefiniowany następującym wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

nazywamy **ciągami arytmetycznymi**.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego, natomiast a jest jego pierwszym wyrazem.

Powyższa definicja oznacza, że po ustaleniu pierwszego wyrazu a , kolejny wyraz powstaje przez dodanie do poprzedniego stałej liczby r .

Definicja rekurencyjna najlepiej ilustruje ideę ciągu arytmetycznego, ale można podać też wzór jawny na n -ty wyraz tego ciągu.

Twierdzenie 6.4. Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r . Wtedy

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

dla $n \geq 1$.

Ciąg arytmetyczny można też scharakteryzować za pomocą następującej zależności między jego trzema kolejnymi wyrazami.

Twierdzenie 6.5. Ciąg $(a_n)_{n>0}$ jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

dla wszystkich indeksów $n > 1$.

Oznacza to, że w ciągu arytmetycznym każdy wyraz oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

6.1.1 Suma początkowych wyrazów ciągu

Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie dowolnym ciągiem. Symbolem

$$S_n := \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

będziemy oznaczać sumę n początkowych wyrazów ciągu, czyli

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

W ten sposób z wyrazów ciągu (a_n) zbudowaliśmy nowy ciąg (S_n) , który nazywamy *ciągami sum częściowych*, a jego n -ty wyraz S_n – *n -tą sumą częściową*.

Ciąg sum częściowych można zdefiniować także w sposób rekurencyjny:

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

dla danego ciągu $(a_n)_{n>0}$.

Wyprowadzenie jawnego wzoru na n -tą sumę częściową S_n (bez użycia „wielokropka”) przeważnie jest bardzo trudne, a wręcz niemożliwe. Na szczęście sytuacja zmienia się, jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Twierdzenie 6.6. Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie ciągiem arytmetycznym. Wtedy suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

dla wszystkich indeksów $n > 0$.

Oznacza to, że suma S_n dla ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej pierwszego i n -tego wyrazu ciągu (a_n) pomnożonej przez liczbę wyrazów n w tej sumie.

6.2 Ciąg geometryczny

Definicja 6.7. [Ciąg geometryczny]

Niech $a, q \in \mathbb{R}$ będą ustalonymi liczbami. Ciąg $(a_n)_{n>0}$ zdefiniowany następującym wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

nazywamy *ciągami geometrycznymi*.

Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu geometrycznego, natomiast a jest jego pierwszym wyrazem.

Powyższa definicja oznacza, że po ustaleniu pierwszego wyrazu a , kolejny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez stałą liczbę q .

Definicja rekurencyjna najlepiej ilustruje ideę ciągu geometrycznego, ale można podać również wzór jawny na n -ty wyraz tego ciągu.

Twierdzenie 6.8. Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$. Wtedy

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Ciąg geometryczny można też scharakteryzować za pomocą następującej zależności między jego trzema kolejnymi wyrazami.

Twierdzenie 6.9. Ciąg $(a_n)_{n>0}$ jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

dla wszystkich indeksów $n > 1$.

Oznacza to, że w ciągu geometrycznym wartość bezwzględna każdego wyrazu oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.

Dla ciągu geometrycznego, podobnie jak to było w przypadku ciągu arytmetycznego, można wyprowadzić wzór na sumę jego n początkowych wyrazów.

Twierdzenie 6.10. Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie ciągiem geometrycznym. Wtedy suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1; \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

dla wszystkich indeksów $n > 0$.

7 Ciągi monotoniczne i ograniczone

Ciągi są funkcjami, zatem wszystkie definicje dotyczące funkcji przenoszą się na ciągi, w szczególności pojęcie różnowartościowości ciągu i zbioru wartości, a także pojęcia sumy i różnicy ciągów, iloczynu ciągu przez liczbę. Dla ciągów liczbowych mamy określone pojęcia ograniczoności ciągu, kresu górnego i dolnego, najmniejszej i największej wartości, jak również pojęcie monotoniczności ciągu, w szczególności pojęcia ciągu rosnącego, malejącego, niemalejącego i nierosnącego.

Definicja 7.1. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy

- a) *ograniczonym z góry*, jeśli istnieje $S \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$a_n \leq S,$$

liczbę S nazywamy *liczbą ograniczającą ciąg z góry (ograniczeniem górnym)*. Ciąg, który nie jest ograniczony z góry nazywamy *nieograniczonym z góry*.

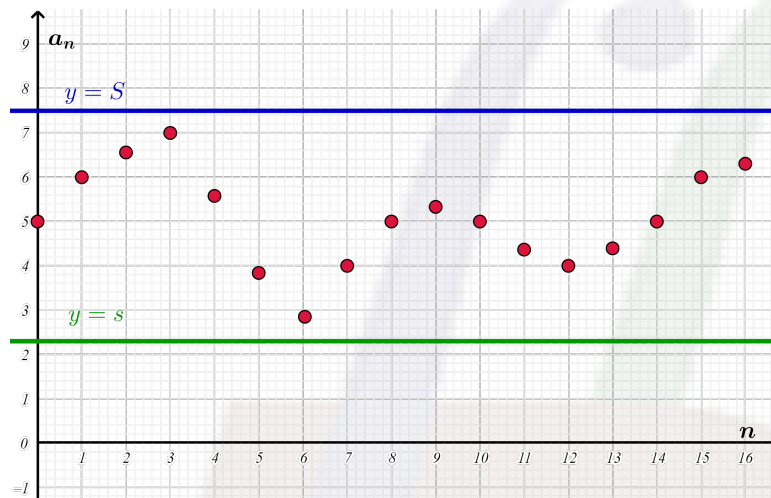
- b) *ograniczonym z dołu*, jeśli istnieje $s \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$a_n \geq s$$

liczbę s nazywamy *liczbą ograniczającą ciąg z dołu (ograniczeniem dolnym)*. Ciąg, który nie jest ograniczony z dołu nazywamy *nieograniczonym z dołu*.

- c) *ograniczonym*, jeśli jest ograniczony zarówno z góry jak i z dołu. Ciąg, który nie jest ograniczony nazywamy *nieograniczonym*.

Jeśli zilustrujemy ciąg w układzie współrzędnych, to wszystkie wyrazy ciągu ograniczonego z góry leżą **pod** pewną prostą poziomą, a wyrazy ciągu ograniczonego z dołu leżą **nad** pewną prostą poziomą. Ciąg jest ograniczony, jeżeli jego wszystkie wyrazy leżą **między** dwiema prostymi poziomymi.



Uwaga Oczywiście, definicja ciągu ograniczonego jest równoważna istnieniu takiego $M \in \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzi nierówność

$$|a_n| \leq M.$$

Definicja 7.2. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ będzie ciągiem ograniczonym.

- Kresem górnym* ciągu (a_n) nazywamy kres górny zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Kresem dolnym* ciągu (a_n) nazywamy kres dolny zbioru $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Wyraz a_{n_0} nazywamy *wyrazem największym* ciągu (a_n) , jeśli $a_{n_0} = \max \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Wyraz a_{n_0} nazywamy *wyrazem najmniejszym* ciągu (a_n) , jeśli $a_{n_0} = \min \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definicja 7.3. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy

- rosnącym* (odpowiednio *niemalejącym (słabo rosnącym)*), jeśli

$$a_n < a_{n+1}, \quad (\text{odpowiednio } a_n \leq a_{n+1})$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

- malejącym* (odpowiednio *nierosnącym (słabo malejącym)*), jeśli

$$a_n > a_{n+1}, \quad (\text{odpowiednio } a_n \geq a_{n+1})$$

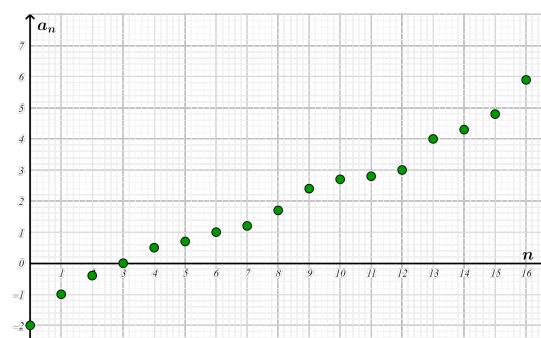
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

- monotonicznym*, jeśli jest (słabo) malejący lub (słabo) rosnący.

Uwaga Zauważmy, że jeśli

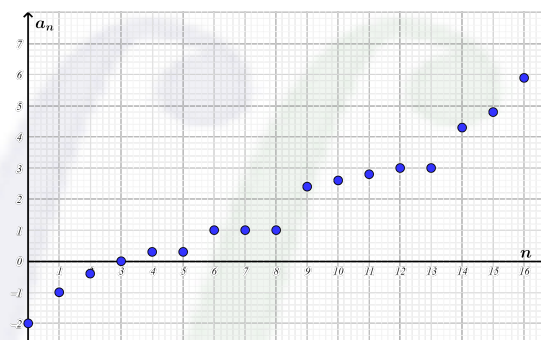
- ciąg jest *rosnący*, to wyrazy ciągu zwiększają się wraz ze wzrostem indeksu n :

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$$



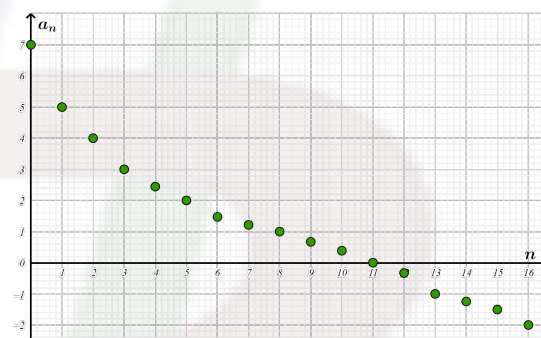
- ciąg jest *niemalejący (słabo rosnący)*, to wyrazy ciągu zwiększają się lub nie zmieniają się wraz ze wzrostem indeksu n :

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$$



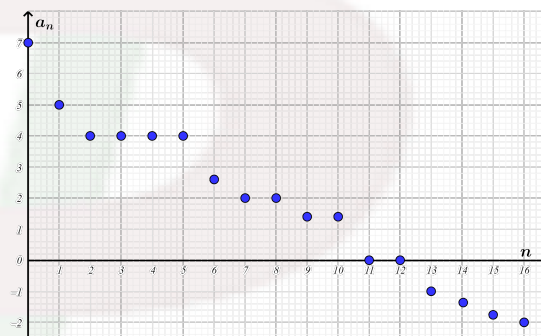
- ciąg jest *malejący*, to wyrazy ciągu zmniejszają się wraz ze wzrostem indeksu n :

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$



- ciąg jest *nierosnący (słabo malejący)*, to wyrazy ciągu zmniejszają się lub nie zmieniają się wraz ze wzrostem indeksu n :

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$$



Istnieje związek między monotonicznością a ograniczonością ciągów, który można zaobserwować na powyższych rysunkach. Ciągi rosnące i niemalejące są zawsze ograniczone z dołu, a ciągi malejące i nierosnące są ograniczone z góry. To stwierdzenie zostało doprecyzowane w poniższej uwadze.

Uwaga

- Jeśli ciąg (a_n) jest (słabo) rosnący, to pierwszy wyraz a_0 jest jego ograniczeniem dolnym, a nawet wyrazem najmniejszym tego ciągu:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 \leq a_n.$$

- Jeśli ciąg (a_n) jest (słabo) malejący, to pierwszy wyraz a_0 jest jego ograniczeniem górnym, a nawet wyrazem największym tego ciągu:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_0.$$

Mówimy, że ciąg (a_n) jest rosnący (słabo rosnący, malejący, słabo malejący) od pewnego miejsca począwszy, jeżeli istnieje indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że nierówność

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n \leq a_{n+1}, \quad a_n > a_{n+1}, \quad a_n \geq a_{n+1})$$

zachodzi dla wszystkich $n \geq n_0$.

Zadanie: Jak wyznaczyć ograniczenie dolne ciągu, który jest (słabo) rosnący począwszy od indeksu $n_0 \in \mathbb{N}$ lub odpowiednio ograniczenie górne ciągu, który jest (słabo) malejący począwszy od tego indeksu?

Przykład 7.4. 📖 Na wykładzie!

Badając monotoniczność ciągów warto czasami skorzystać z poniższej uwagi i przedstawić różnicę dwóch kolejnych wyrazów ciągu w możliwie najprostszej postaci, a następnie określić jej znak.

Uwaga

- Dla dowolnego ciągu (a_n) warunki

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad a_n < a_{n+1}, \quad a_n \geq a_{n+1}, \quad a_n > a_{n+1}$$

są równoważne odpowiednio warunkom

$$a_{n+1} - a_n \geq 0, \quad a_{n+1} - a_n > 0, \quad a_{n+1} - a_n \leq 0, \quad a_{n+1} - a_n < 0.$$

- Dla ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich warunki

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad a_n < a_{n+1}, \quad a_n \geq a_{n+1}, \quad a_n > a_{n+1}$$

są równoważne odpowiednio warunkom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

zaś dla ciągu o wyrazach ujemnych – warunkom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Przykład 7.5. Dla dowolnych liczb $\alpha > 0$ oraz $a > 1$ ciąg (x_n) o wyrazach

$$x_n = \frac{n^\alpha}{a^n}, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N},$$

jest ograniczony i malejący od pewnego miejsca.

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

Lemat 7.6. [Nierówność Bernoulliego]

Niech $x \geq -1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wówczas dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dowód: 📖 Na ćwiczeniach ze Wstępu do Logiki i Teorii Mnogości!

Przykład 7.7. Ciąg (a_n) o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}^*,$$

jest rosnący i ograniczony z góry, natomiast ciąg (b_n) o wyrazach

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}^*,$$

jest malejący i ograniczony z dołu.

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

Przykład 7.8. Ciąg (a_n) o wyrazach

$$a_n = \sqrt[n]{n}, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}^*,$$

jest ograniczony i malejący począwszy od $n = 3$.

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

8 Granica ciągu liczbowego

Przejdziemy teraz do pierwszego ważnego pojęcia analizy matematycznej, a mianowicie do pojęcia zbieżności ciągu.

Definicja 8.1. [Granica ciągu liczbowego]

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zbieżny* do *granicy właściwej* $a \in \mathbb{R}$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ taka, że

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich} \quad n > n_\varepsilon.$$

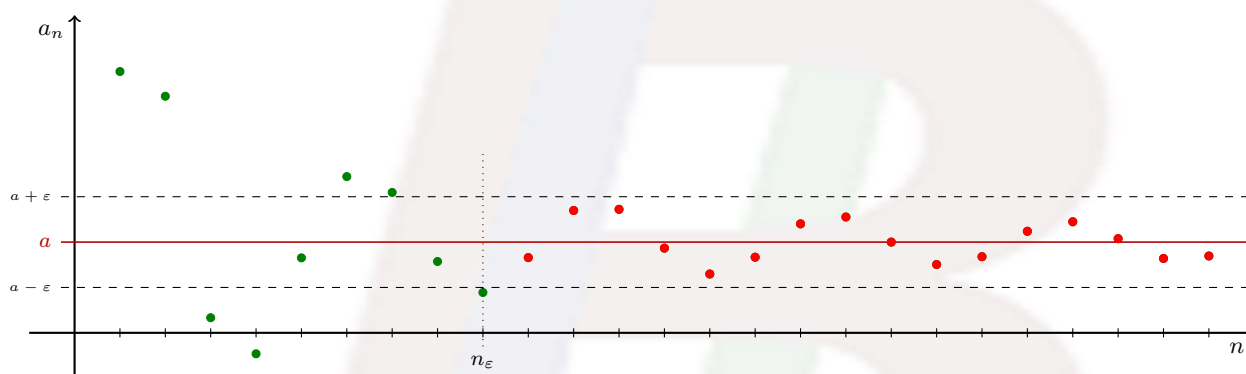
Fakt ten zapisujemy w następujący sposób:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

i oznaczamy:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{lub} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{dla} \quad n \rightarrow \infty.$$

Interpretacja graficzna granicy ciągu liczbowego:



Uwaga W definicji granicy ciągu można zmienić nierówności ostre „<”, „>” odpowiednio na nierówności nieostre „≤”, „≥”, z wyjątkiem jednej nierówności „ $\varepsilon > 0$ ” i uzyskany warunek będzie równoważny definicji. W szczególności definicja granicy ciągu jest równoważna następującej:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Ponadto, powyższa definicja granicy oznacza, że

- ciąg (a_n) aproksymuje liczbę a , tzn. dla **prawie wszystkich** wyrazów ciągu a_n odległość $|a_n - a|$ jest mniejsza od dowolnie zadanej liczby ε ;
- w dowolnym otoczeniu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liczby a o promieniu ε leżą **prawie wszystkie** wyrazy a_n ciągu (a_n) .

Wyrażenie „prawie wszystkie” oznacza: wszystkie, poza skończoną liczbą.

Przykład 8.2.

- ❶ Rozważmy ciąg harmoniczny $(a_n)_{n>0}$, gdzie $a_n = \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tzn.

$$(a_n)_{n>0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right).$$

Tw.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy dla wszystkich liczb $n > n_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ zachodzi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

❷ Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem danym wzorem $a_n := \frac{n}{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right).$$

Tw.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy dla wszystkich $n > n_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ zachodzi

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_\varepsilon + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

❸  Więcej przykładów na wykładzie!

8.1 Podstawowe własności granicy ciągu

Zajmiemy się teraz podstawowymi własnościami ciągów zbieżnych.

Zmiana, usunięcie lub dołączenie skończenie wielu wyrazów ciągu (a_n) nie ma wpływu na jego zbieżność i wartość granicy. Oznacza to, że prawdziwe są następujące własności:

Własność 8.3. Jeśli dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $a_n = b_n$, to ciąg (b_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dowód:  Ćwiczenie!

Własność 8.4. Jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $b_n = a_{n+k}$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dowód:  Ćwiczenie!

W przykładzie 8.2 wykazaliśmy, że ciąg harmoniczny (a_n) o wyrazach $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny do 0. Powyższe własności zapewniają zbieżność np. ciągu (b_n) o wyrazach $b_n = \frac{1}{n+2}$ i dodatkowo wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Zmiana kolejności wyrazów ciągu również nie wpływa na zbieżność ciągu:

Własność 8.5. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym oraz niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_{f(n)})$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{f(n)}.$$

Dowód:  Ćwiczenie!

Bardzo istotne jest następujące twierdzenie o jednoznaczności granicy.

Twierdzenie 8.6. Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Dowód:  Na wykładzie!

Twierdzenie 8.7. Każdy ciąg zbieżny do granicy właściwej jest ograniczony.

Dowód:  Na wykładzie!

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Dla przykładu rozważmy ciąg naprzemienny (a_n) , gdzie $a_n = (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg ten jest ograniczony, ponieważ $|a_n| \leq 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, ale nie jest zbieżny (por. przykład 8.13).

Nietrudno jest pokazać następujący fakt:

Twierdzenie 8.8. Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne oraz dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Dowód:  Ćwiczenie!

W powyższym twierdzeniu nierówności nieostrej „ $\leq$ ” nie można zastąpić nierównością ostrą „ $<$ ”! Dla przykładu rozważmy ciąg (a_n) o wyrazach $a_n = \frac{1}{n+2}$ i ciąg (b_n) o wyrazach $b_n = \frac{1}{n}$. Wtedy $a_n < b_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}^*$, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

a nie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy a , to ciąg $(|a_n|)$ jest zbieżny do granicy $|a|$, co wynika natychmiast z nierówności

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, o czym świadczy przykład ciągu o wyrazach $a_n = (-1)^n$. Zachodzi jednak następująca

Własność 8.9. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym, wtedy prawdziwa jest następująca równoważność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Dowód tej równoważności wynika natychmiast z równości $||a_n|| = |a_n|$.

Kolejną własność wykorzystuje się bardzo często wyznaczając efektywnie granice ciągów.

Własność 8.10. Jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony oraz ciąg (b_n) jest ciągiem zbieżnym do zera, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Dowód: 📖 Na wykładzie!

Przykład 8.11. Rozważmy ciąg (a_n) o wyrazach $a_n = \sin(n^2 \cdot 2^n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ i ciąg (b_n) o wyrazach $b_n = \frac{1}{n+2}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg (c_n) o wyrazach

$$c_n = \frac{\sin(n^2 \cdot 2^n)}{n+2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do 0.

8.2 Granice niewłaściwe ciągu liczbowego

Definicja 8.12.

- Ciąg (a_n) , który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.
- Mówimy, że ciąg (a_n) ma *granice niewłaściwą $+\infty$* lub jest *rozbieżny do $+\infty$* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnie wybranej liczby $p \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $n_p \in \mathbb{N}$, że

$$a_n > p \quad \text{dla każdego } n > n_p.$$

Fakt ten zapisujemy i oznaczamy w następujący sposób

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \iff \forall p \in \mathbb{R} \exists n_p \in \mathbb{N} \forall n > n_p: a_n > p.$$

- Mówimy, że ciąg (a_n) ma *granice niewłaściwą $-\infty$* lub jest *rozbieżny do $-\infty$* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnie wybranej liczby $m \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $n_m \in \mathbb{N}$, że

$$a_n < m \quad \text{dla każdego } n > n_m.$$

Fakt ten zapisujemy i oznaczamy w następujący sposób

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R} \exists n_m \in \mathbb{N} \forall n > n_m: a_n < m.$$

Przykład 8.13.

- ❶ Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem naprzemiennym, danym wzorem $a_n := (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

Tw.: Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

Dowód: Załóżmy nie wprost, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $a \in \mathbb{R}$. Weźmy $\varepsilon = 0,5$. Z definicji granicy wynika, że istnieje $n_{0,5} \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ dla wszystkich $n > n_{0,5}$. Zatem

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{dla } n > n_{0,5}.$$

Z drugiej strony $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Łatwo zauważyć, że ciąg (a_n) nie może mieć też granicy niewłaściwej.

- ❷ Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem danym wzorem $a_n = 2^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots).$$

Tw.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Dowód: Niech $M \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie wybraną liczbą. Łatwo zauważyć, że dla wszystkich $n > n_M := [\log_2 M] + 1$ zachodzi nierówność

$$a_n = 2^n > 2^{n_M} > 2^{\log_2 M} = M.$$

Dla ciągów o granicach niewłaściwych zachodzą twierdzenia analogiczne do twierdzeń dla ciągów o granicach właściwych (por. własności 8.3, 8.4, 8.5).

Własności 8.14. Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami liczbowymi.

- a) Jeśli dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $a_n = b_n$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

lub odpowiednio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

- b) Jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $b_n = a_{n+k}$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

lub odpowiednio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

- c) Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{f(n)} = +\infty$$

lub odpowiednio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{f(n)} = -\infty.$$

Podobnie jak twierdzenie 8.6 dowodzimy

Twierdzenie 8.15. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym.

- a) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to $a = +\infty$.
b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to $a = -\infty$.

Zachodzi także odpowiednik twierdzenia 8.8:

Twierdzenie 8.16. Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami liczbowymi takimi, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

- a) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.
- b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

8.3 Podciąg ciągu liczbowego

Definicja 8.17. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym i niech $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ będzie silnie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Ciąg $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ określony wzorem

$$b_k := a_{n_k} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

nazywamy *podciągiem* lub *ciągami częściowym* ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Obrazowo mówiąc podciągiem nazywamy ciąg pozostały po skreśleniu pewnej liczby (być może nieskończonej ilości) wyrazów ciągu wyjściowego.

Uwaga

Jeśli $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jest silnie rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to $n_k \geq k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 8.18. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym, $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jego podciągiem oraz niech $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Jeśli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do granicy a , to $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Dowód: na wykładzie!

Jeśli wszystkie podciągi ciągu (a_n) są zbieżne do tej samej granicy a , to oczywiście sam ciąg (a_n) jest zbieżny do a . Ciągi, które nie są zbieżne, mają zatem podciągi zbieżne do różnych granic. Na przykład ciąg (a_n) o wyrazach

$$a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Łatwo można pokazać, że podciąg (a_{n_k}) dla $n_k = 2k$ ma granicę 1, a podciąg (a_{n_k}) dla $n_k = 2k + 1$ jest zbieżny do -1 .

Lemat 8.19. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- a) Istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.
- b) Dla każdego $\varepsilon > 0$ zbiór $X_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ jest nieskończony.

Podpunkt b) można też sformułować w następujący sposób: W każdym otoczeniu liczby a znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) . Ale **nie** prawie wszystkie!

Dokładniej pojęciem podciągu będziemy zajmować się w rozdziale 8.5.

8.4 Podstawowe twierdzenia o granicach ciągów

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się pojęciem granicy, a także teoretycznymi rozważaniami na temat zbieżności. W tym rozdziale naszym głównym celem będzie efektywne obliczanie granic ciągów. Przede wszystkim będziemy przy tym wykorzystywać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.20. [o arytmetyce granic ciągów]

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami zbieżnymi oraz niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

Wówczas

- a) ciąg $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

- b) ciąg $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

w szczególności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b_n) = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- c) ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

jeśli $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Dowód:  jednego z podpunktów na wykładzie, reszta – ćwiczenie!

Zauważmy, że bezpośrednio z poprzedniego twierdzenia wynikają następujące dwa fakty:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = a^p, \quad p \in \mathbb{Z};$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\};$

o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i powyższe wyrażenia mają sens.

Przy obliczaniu granic ciągów bardzo przydaje się następujący fakt:

Lemat 8.21. [o granicy ciągu geometrycznego]

Niech $q \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leq -1, \\ 0 & \text{dla } -1 < q < 1, \\ 1 & \text{dla } q = 1, \\ +\infty & \text{dla } q > 1. \end{cases}$$

Dowód:  na wykładzie!

Z powyższego twierdzenia oraz ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (zob. twierdzenie 6.10) wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.22. [Suma wyrazów ciągu geometrycznego]

Jeśli iloraz ciągu geometrycznego spełnia warunek $|q| < 1$, to ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny oraz jego granica dana jest wzorem

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Dla $|q| \geq 1$ ciąg (S_n) jest rozbieżny.

Wzór z powyższego twierdzenia nazywamy wzorem na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego.

Rozważmy teraz dwa przykłady obliczania granic ciągów, które zostały bardzo szczegółowo rozpisane, aby zaakcentować miejsca, w których korzystamy z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów. W praktyce, po nabraniu doświadczenia, nie jest to konieczne. Większość przekształceń wykonuje się „w głowie”, a twierdzenie o arytmetyce granic jest tak intuicyjne i zgodne z naszymi oczekiwaniami, że nawet nie zdajemy sobie sprawy z jego stosowania.

Przykład 8.23.

❶

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} = \\
 &= 1 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \\
 &= 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \\
 &= 1 + 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1
 \end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{4n^2 + 3n - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2})} = \\
 &= \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

📖 Więcej przykładów na wykładzie!

Bezpośrednio z definicji dostajemy następujące własności granicy niewłaściwej.

Własności 8.24. Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami liczbowymi.

- a) Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\infty$.
- b) Jeśli $a_n > 0$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.
- c) Jeśli $a_n < 0$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.
- e) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.
- f) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$.
- g) Jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

- h) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$ lub $a = +\infty$, i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$.

Uwaga 8.25. Bardzo często powyższe twierdzenia zapisuje się w symbolicznej, skrótowej formie, która jest łatwiejsza do zapamiętania.

Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą. Wtedy zachodzą następujące równości:

$-(+\infty) = -\infty$	$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$
$\frac{1}{0^+} = +\infty$	$\frac{1}{0^-} = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty,$
$\infty + a = a + \infty = \infty$	$-\infty + a = a - \infty = -\infty$
$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ dla $a > 0$	$\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty$ dla $a < 0$
$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$	$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

Przykład 8.26. 📢 Na wykładzie!

Wyrażenia

$$[0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

nazywamy **nieoznaczonymi**! Ich wartości zależą od tworzących je ciągów, czyli mówiąc opisowo: „nie wiadomo jaki jest wynik działania”. Na wykładzie prześledzimy przykłady ciągów, które będą prowadzić do tego samego typu wyrażenia nieoznaczonego, natomiast ich granice będą różne. Nie są to jedyne symbole nieoznaczone, następne wprowadzimy później.

8.4.1 Twierdzenie o trzech ciągach

Obliczając granice ciągów, w trudniejszych przypadkach, będziemy wykorzystywać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.27. [o trzech ciągach]

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi oraz niech

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas jeśli $g \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, to ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ też jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Dowód: 📢 Na wykładzie!

Przykład 8.28.

❶ Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}^*$.

Tw.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dowód: Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n}$, zatem także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

❷ Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach $a_n = \frac{2n^2 + n \sin 2^n}{n^2 + 1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Tw.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Rozważmy ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $b_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1}$, wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2.$$

Ponadto dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$b_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1} = \frac{2n^2 + n \cdot (-1)}{n^2 + 1} \leq \frac{2n^2 + n \sin 2^n}{n^2 + 1} = a_n.$$

Natomiast dla ciągu $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach $c_n = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2$$

zachodzi:

$$c_n = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1} = \frac{2n^2 + n \cdot 1}{n^2 + 1} \geq \frac{2n^2 + n \sin 2^n}{n^2 + 1} = a_n.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n \sin 2^n}{n^2 + 1} = 2.$$

Korzystając z powyższych twierdzeń można obliczyć granice wielu ciekawych ciągów.

Przykład 8.29. Niech $\alpha > 0$ oraz $a > 1$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

Przykład 8.30. Niech $a > 0$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

Przykład 8.31.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

📖 Uzasadnienie na wykładzie!

Przykład 8.30 możemy łatwo uogólnić korzystając z twierdzenia o trzech ciągach (por. twierdzenie 8.27) i twierdzenia 8.18 otrzymując następujący, bardzo istotny fakt.

Wniosek 8.32. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^b.$$

📖 Dowód – literatura!

Można pomyśleć, że nie jest tu potrzebny żaden dowód, bo przecież od razu widać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = a^b.$$

Niestety, byłoby to zbyt proste. Wykorzystujemy tutaj ciągłość funkcji wykładniczej, a przecież jeszcze nie znamy tego pojęcia! Dopiero przygotowujemy się do wprowadzenia go. Podobnie można skomentować następne twierdzenie.

Twierdzenie 8.33. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ oraz $a \neq 1$. Jeśli (b_n) jest ciągiem takim, że $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a b_n = \log_a b.$$

📖 Dowód – literatura!

Twierdzenie 8.34. Niech (a_n) , (b_n) będą ciągami liczbowymi zbieżnymi oraz niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Jeśli $a > 0$ oraz $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.
- b) Jeśli $a = 0$, $b > 0$ oraz $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$.

 **Dowód – literatura!**

Rozumując podobnie jak wyżej, można udowodnić analogiczne twierdzenia dla ciągów o granicach niewłaściwych.

Twierdzenie 8.35. Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gdzie $a \neq 1$ oraz niech (b_n) będzie ciągiem takim, że $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

- a) Jeśli $a > 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a b_n = +\infty$.
- b) Jeśli $a < 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a b_n = -\infty$.
- c) Jeśli $a > 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a b_n = -\infty$.
- d) Jeśli $a < 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a b_n = +\infty$.

Twierdzenie 8.36. Niech (a_n) , (b_n) będą ciągami liczbowymi oraz $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

- a) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a > 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = +\infty$.
- b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a < 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = 0$.

Powyższe twierdzenia wykorzystamy do narysowania wykresu funkcji wykładniczej i logarytmicznej.

Podobnie jak poprzednio, twierdzenia te można zapisać w symbolicznej, skrótowej formie.

Uwaga 8.37. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, wtedy zachodzą następujące równości:

$a^\infty = 0$	dla $0 < a < 1$	$a^\infty = \infty$	dla $1 < a \leq +\infty$
$\infty^b = 0$	dla $-\infty \leq b < 0$	$\infty^b = \infty$	dla $0 < b \leq +\infty$

Wyrażenia

$$[1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

także są wyrażeniami **nieoznaczonymi**!

8.4.2 Zbieżność ciągów monotonicznych i ograniczonych

Wspomnieliśmy, że ciągi zbieżne są ograniczone i podaliśmy przykład, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne. Można natomiast udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.38. [o ciągu monotonicznym i ograniczonym]

- a) Jeśli ciąg (a_n) jest (słabo) rosnący dla $n > n_0$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, i ograniczony z góry, to jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N} \text{ i } n > n_0\}.$$

- b) Jeśli ciąg (a_n) jest (słabo) malejący dla $n > n_0$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, i ograniczony z dołu, to jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N} \text{ i } n > n_0\}.$$

 **Dowód na wykładzie!**

Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym pozwala nam zbadać zbieżność następujących ciekawych ciągów. Przykładowo, pokazaliśmy już wcześniej, że ciąg (a_n) o wyrazach $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, zatem prawdą jest następujący fakt.

Uwaga 8.39. Z twierdzenia 8.38 i przykładu 7.7 wynika, że ciąg $(a_n)_{n>0}$ o wyrazach

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy symbolem e , czyli

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

i nazywamy *liczbą Nepera (Eulera)*.

Z twierdzenia 8.38 wynika także, że ciąg $(b_n)_{n>0}$ o wyrazach

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

jest także zbieżny do liczby e , ale w sposób malejący, tzn.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Zauważmy jeszcze, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}.$$

Z twierdzenia 8.18 i uwagi 8.39 otrzymujemy, że dla dowolnego ciągu (n_k) liczb naturalnych zmierzającego do $+\infty$ zachodzi równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach (por. tw. 8.27) możemy udowodnić znacznie więcej.

Wniosek 8.40. [Granice specjalne]

Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz niech (a_n) będzie ciągiem takim, że $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

a) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

c) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

d) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

 **Dowód na wykładzie!**

Natomiast korzystając z twierdzenia 8.33 możemy obliczyć granice kolejnych ciągów specjalnych.

Wniosek 8.41. [Granice specjalne]

Niech (a_n) będzie takim ciągiem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, wtedy

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1;$$

b) dla $x > 0$ i $x \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_x(1 + a_n)}{a_n} = \frac{1}{\ln x};$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1;$$

d) dla $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{a_n} - 1}{a_n} = \ln x;$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^x - 1}{a_n} = x.$$

 **Dowód na wykładzie!**

Następne granice specjalne wyznaczymy korzystając z prostych zależności geometrycznych.

Wniosek 8.42. [Granice specjalne]

Niech (a_n) będzie takim ciągiem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, wtedy

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1;$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(a_n)}{a_n} = 1;$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(a_n)}{a_n} = 1;$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(a_n)}{a_n} = 1.$$

 **Dowód na wykładzie!**

8.5 Podciąg ciągu liczbowego cd.

Wiemy już, że warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym!) zbieżności ciągu jest jego ograniczoność (por. tw. 8.7). Dowiedzieliśmy się także, że gdy do założenia ograniczoności ciągu dołożymy założenie monotoniczności, to zapewnimy zbieżność danego ciągu (por. tw. 8.38). Jest to jednak mocne założenie.

Korzystając z pojęcia podciągu wprowadzonego w rozdziale 8.3 udowodnimy teraz jedno z ważniejszych twierdzeń w analizie matematycznej.

Twierdzenie 8.43. [Bolzano–Weierstrassa] Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny.

Dowód:  na wykładzie!

Definicja 8.44. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy *punktem skupienia* lub *granicą częściową* ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdy istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do a .

Symbol ∞ (lub $-\infty$) jest *niewłaściwym punktem skupienia*, jeśli istnieje podciąg tego ciągu rozbieżny do ∞ (lub odpowiednio do $-\infty$).

Łatwo można pokazać, że jeśli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z góry, to $+\infty$ jest jego punktem skupienia, a jeśli ciąg ten nie jest ograniczony z dołu, to $-\infty$ jest jego punktem skupienia. Z powyższego faktu i twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że zbiór punktów skupienia danego ciągu jest zbiorem niepustym².

Definicja 8.45. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym i niech S będzie zbiorem punktów skupienia tego ciągu. *Granicą dolną* ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy kres dolny zbioru S i oznaczamy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf S.$$

Granicą górną ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy kres górny zbioru S i oznaczamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup S.$$

Jeśli $\infty \in S$, to przyjmujemy, że $\sup S = \infty$. Podobnie, jeśli $-\infty \in S$, to przyjmujemy, że $\inf S = -\infty$. Ponadto, jeżeli $S = \{-\infty\}$, to $\sup S = -\infty$, a jeżeli $S = \{\infty\}$, to $\inf S = \infty$.

Oczywiste jest, że dla każdego ciągu liczbowego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponadto zauważmy, że kres górny i dolny zbioru punktów skupienia są zawsze osiągnięte, czyli $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ są odpowiednio największym i najmniejszym punktem skupienia ciągu.

Własność 8.46. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

8.6 Ciągi Cauchy'ego

Definicja 8.47. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeśli: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Krótko:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nazywamy *ciągami Cauchy'ego*.

²Często twierdzenie Bolzano–Weierstrassa podaje się w formie uzupełnionej o przypadek ciągu nieograniczonego i pokazuje, że wtedy da się z takiego ciągu wybrać podciąg mający granicę niewłaściwą.

Warunek sformułowany w powyższej definicji, jest prawie taki sam, jak warunek występujący w definicji granicy ciągu, jedynie odległość $|a_n - a|$ wyrazu a_n od granicy a została zastąpiona przez odległość $|a_n - a_m|$ dwóch wyrazów ciągu.

Oznacza to, że warunek Cauchy'ego można zapisać w postaci $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0$.

Przykład 8.48. 📖 Na wykładzie!

Bezpośrednio z definicji dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.49. Każdy ciąg zbieżny (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Powyższe twierdzenie oznacza, że warunek Cauchy'ego jest warunkiem koniecznym zbieżności ciągu.

Przykład 8.50. 📖 Na wykładzie!

Warunek Cauchy'ego nie jest jednak warunkiem wystarczającym zbieżności ciągu. Przykładowo, gdyby nie było liczb rzeczywistych, to niektóre liczbowe ciągi Cauchy'ego (składające się z liczb wymiernych) nie miałyby granicy.

Przykład 8.51. 📖 Na wykładzie!

W zbiorze liczb rzeczywistych prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.52. Każdy ciąg liczb rzeczywistych spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Uwaga Przestrzenie, w których ciągi Cauchy'ego są zbieżne, nazywamy przestrzeniami *zupełnymi*. Z twierdzenia 8.52 wynika zatem, że przestrzeń liczb rzeczywistych jest zupełna.

Przestrzenie zupełne będą omawiane na wykładach z *Analizy Matematycznej* i *Wstępu do Topologii* w następnym semestrze.

Część III

Szeregi liczbowe

9 Definicja szeregu liczbowego i jego podstawowe własności

Definicja 9.1. Niech $(a_n)_{n>0}$ będzie ciągiem liczbowym.

- a) *Szeregiem liczbowym* o wyrazach $a_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nazywamy parę ciągów

$$\left((a_n)_{n>0}, (S_n)_{n>0} \right),$$

gdzie

$$S_n := \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Notacja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n \geq 1} a_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n, \quad \sum a_n.$$

Ciąg (S_n) nazywamy *ciągami sum częściowych* szeregu, a jego n -ty wyraz S_n – *n -tą sumą częściową*. Natomiast ciąg (a_n) nazywa się *ciągami wyrazów*, a jego wyraz a_n – *n -tym wyrazem* szeregu.

- b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy *zbieżnym* do $S \in \mathbb{R}$, jeśli ciąg sum częściowych $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Liczbę S nazywamy *sumą* szeregu.

Notacja:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.

Uwaga Bardzo często szeregiem nazywa się po prostu ciąg sum częściowych (S_n) , mimo że formalnie szereg należy traktować jako parę uporządkowaną $((a_n), (S_n))$.

Analogicznie definiujemy szeregi $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest ustaloną liczbą (patrz także: uwagi po definicji 6.1).

Ciąg sum częściowych można zdefiniować także w sposób rekurencyjny:

$$S_1 = a_1, \quad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

dla danego ciągu $(a_n)_{n>0}$.

Zauważmy, że gdy wszystkie wyrazy szeregu są nieujemne, to $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ dla wszystkich liczb naturalnych $n > 0$, czyli ciąg sum częściowych (S_n) jest rosnący.

Czasami można zbadać zbieżność szeregów liczbowych wprost z definicji, to znaczy najpierw obliczając ich sumy częściowe, a następnie granicę ciągu tych sum.

Przykład 9.2.

❶ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

❷ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

Nie można szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ traktować jako „sumy nieskończenie wielu składników”, ponieważ może to prowadzić do zamieszania (por. następny przykład).

Przykład 9.3.

- ❶ Niech $a_i = q^i$ dla $i \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$. Ciąg $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach

$$S_n = \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

nazywamy *szeregiem geometrycznym*.

Indukcyjnie można wykazać, że n -ta suma częściowa szeregu geometrycznego dana jest wzorem

$$S_n = \sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{dla } q \neq 1; \\ n+1 & \text{dla } q = 1. \end{cases}$$

Wynika stąd, że dla $|q| < 1$ szereg geometryczny (por. lemat 8.21) jest zbieżny i jego suma dana jest wzorem

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Dla $|q| \geq 1$ szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest rozbieżny.

- ❷ Szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Ciąg sum częściowych $(S_n)_{n>0}$ o wyrazach

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

jest rosnący. Pokażemy, że ciąg ten nie jest ograniczony z góry, zatem nie może być zbieżny. W tym celu rozważmy następujące sumy częściowe:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{1}{2}} > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ogólnie otrzymujemy:

$$S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wynika z tego, że ciąg $(S_n)_{n>0}$ rośnie w sposób nieograniczony i szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny (por. Zadanie 5.14 b).

- ❸ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Ciąg sum częściowych $(S_n)_{n>0}$ o wyrazach

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

jest rosnący.

Poza tym dla wszystkich $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} = \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Zatem ciąg sum częściowych $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony i z twierdzenia 8.38 wynika, że jest także zbieżny.

Z definicji szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Można nawet pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Szeregi liczbowe są szczególnymi ciągami, a mianowicie ciągami sum częściowych. Na odwrót, na ciąg także można popatrzeć jak na szereg, ponieważ wyrazy każdego ciągu $(a_n)_{n \geq 0}$ można zapisać w postaci sum (teleskopowych)

$$a_n = a_1 - \sum_{i=2}^n (a_{i-1} - a_i).$$

Jest to zatem tylko kwestia zapisu, czy używamy ciągów czy szeregów liczbowych.

Zbieżność szeregu zdefiniowana jest poprzez zbieżność ciągu sum częściowych, zatem z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów (por. twierdzenie 8.20) natychmiast wynika następujący fakt.

Twierdzenie 9.4. Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ są dowolnymi liczbami, to zbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$, przy czym

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

W szczególności zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

które nazywamy odpowiednio sumą (różnicą) szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i iloczynem szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przez liczbę α .

Analogicznie, dla szeregów możemy sformułować odpowiednik warunku Cauchy'ego (s. Def. 8.47):

Sumy częściowe S_n szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ spełniają warunek Cauchy'ego, jeśli dla dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka naturalna liczba n_ε , że $|S_m - S_n| < \varepsilon$ dla wszystkich $m, n > n_\varepsilon$. Zauważmy, że dla $m > n$ mamy

$$S_m - S_n = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=n+1}^m a_i.$$

Teraz bez trudu możemy sformułować następujący warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregów (por. twierdzenie 8.52 i wcześniejsze).

Twierdzenie 9.5. [Cauchy'ego dla szeregów]

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka naturalna liczba n_ε , że

$$\left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich $m > n > n_\varepsilon$.

Czyli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \forall m > n > n_{\varepsilon} : \left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Cauchy'ego ma duże teoretyczne znaczenie, ale jego zastosowanie do konkretnych szeregów jest bardzo skomplikowane. Wnioskiem z niego jest jednak następujące twierdzenie, które łatwo można zastosować w praktyce.

Wniosek 9.6. [Warunek konieczny zbieżności szeregu]

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to ciąg jego wyrazów jest zbieżny do zera, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ w żadnym wypadku **nie jest** warunkiem wystarczającym zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, co łatwo zauważyć na przykładzie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (por. przykład 9.3 b).

Jeśli o pewnym szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wiemy tylko, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to o zbieżności tego szeregu nie można nic konkretnego powiedzieć. Jeśli natomiast stwierdzimy, że ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ nie jest zbieżny do zera, to szereg z pewnością jest rozbieżny.

Łatwym wnioskiem z twierdzenia Cauchy'ego jest także następujący fakt.

Uwaga 9.7. Dla każdego ustalonego $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (ale ich sumy różnią się). Oznacza to, że odrzucenie skończonej ilości początkowych wyrazów szeregu lub dołączenie na początku skończonej ilości wyrazów nie wpływa na zbieżność szeregu.

Pokazaliśmy, że dla szeregów zachodzą odpowiedniki pewnych własności ciągów, nie dotyczy to jednak wszystkich własności. W przypadku ciągów można zamienić kolejność wyrazów bez straty zbieżności ciągu. Odpowiednik tego faktu dla szeregów jest fałszywy, mianowicie istnieją szeregi zbieżne, które po zamianie kolejności wyrazów stają się rozbieżne.

10 Szeregi o wyrazach nieujemnych

Sumy częściowe szeregu o wyrazach nieujemnych tworzą ciąg niemalejący. Z twierdzeń 8.7 i 8.38 wynika zatem natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.1. Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.

Zastosowanie tego twierdzenia widzieliśmy już w przykładzie 9.3.

Wykazanie zbieżności lub rozbieżności szeregu wprost z definicji (to znaczy poprzez wyznaczenie jego sum częściowych oraz policzenie ich granicy) bądź z powyższego twierdzenia jest przeważnie bardzo trudne. Twierdzenia, które teraz przedstawimy, zwane kryteriami zbieżności szeregów pozwalają nam jednak na w miarę łatwe rozstrzygnięcie, czy dany szereg jest zbieżny czy nie, ale bez wskazania jego sumy.

10.1 Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych

10.1.1 Kryteria porównawcze

Definicja 10.2. Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą dwoma szeregami liczbowymi o wyrazach nieujemnych.

- a) Szereg $\sum b_n$ nazywamy *majorantą* szeregu $\sum a_n$, jeśli

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

dla prawie wszystkich indeksów n .



- b) Szereg $\sum a_n$ nazywamy *minorantą* szeregu $\sum b_n$, jeśli

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

dla prawie wszystkich indeksów n .

Twierdzenie 10.3. [Pierwsze kryterium porównawcze zbieżności szeregu]

- a) Jeśli szereg $\sum a_n$ ma zbieżną majorantę, to jest zbieżny.
 b) Jeśli szereg $\sum b_n$ ma rozbieżną minorantę, to jest rozbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Przykład 10.4.

- ❶ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.
 ❷ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^n-2}$ jest zbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Czasami do zbadania zbieżności szeregu łatwiej jest zastosować kryterium porównawcze w innej wersji, zwanej wersją ilorazową.

Wniosek 10.5. [Drugie kryterium porównawcze zbieżności szeregu]

Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich. Załóżmy ponadto, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

dla prawie wszystkich indeksów n .

- a) Jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.
 b) Jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny.

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

Szczególnie łatwe w zastosowaniu jest następujące kryterium.

Twierdzenie 10.6. [Kryterium graniczne]

Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich. Załóżmy, że istnieje następująca granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$K := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

- a) Jeśli $K < +\infty$ i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.
 b) Jeśli $K > 0$ i szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że prawdziwy jest następujący fakt.

Wniosek 10.7. Niech $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą szeregami o wyrazach dodatnich. Jeśli

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty,$$

to oba szeregi są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Dowód: 📖 Ćwiczenie!

Przykład 10.8.

- ❶ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$ jest zbieżny.

Uzasadnienie: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (por. przykład 9.3, (3)) i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2-2}{n^4+5n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2-2) \cdot n^2}{n^4+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4-2n^2}{n^4+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{5}{n^3}} = 3.$$

Z kryterium granicznego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$ jest zbieżny.

- ❷ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$ jest rozbieżny.

Uzasadnienie: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (por. przykład 9.3, (2)) i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+5}{3n^2-2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5) \cdot n}{3n^2-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5n}{3n^2-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Z kryterium granicznego wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$ jest rozbieżny.

10.1.2 Kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu

Zapoznając się z teorią szeregów liczbowych i ich zbieżnością nie można zapomnieć o kolejnym kryterium, które często bywa nazywane kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu.

Twierdzenie 10.9. [Cauchy'ego o zagęszczaniu]

Jeśli (a_n) jest ciągiem malejącym o wyrazach nieujemnych, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ jest zbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Korzystając z powyższego twierdzenia można określić zbieżność uogólnionego szeregu harmonicznego w zależności od parametru α . Tę zależność warto zapamiętać, ponieważ uogólniony szereg harmoniczny można wykorzystać we wcześniej omówionych kryteriach porównawczych.

Wniosek 10.10. Uogólniony szereg harmoniczny

$\text{Szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{jest} \quad \begin{cases} \text{rozbieżny dla } \alpha \leq 1; \\ \text{zbieżny dla } \alpha > 1. \end{cases}$

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

Poniższy szereg szczególnie łatwo można zbadać wykorzystując kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu.

Przykład 10.11. Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny.

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

10.1.3 Inne kryteria zbieżności

W przykładzie 9.3 widzieliśmy, że szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego iloraz $|q| < 1$. Wykorzystując szereg geometryczny w twierdzeniu 10.3 jako zbieżną majorantę lub rozbieżną minorantę, otrzymujemy kolejne kryteria zbieżności szeregów liczbowych.

Następne kryterium pochodzi od francuskiego matematyka Jean Baptiste Le Rond d'Alemberta (1717–1783).

Twierdzenie 10.12. [Kryterium d'Alemberta]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach dodatnich.

- Jeśli istnieją liczba $q < 1$ i liczba naturalna n_0 takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ dla $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- Jeśli istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ dla $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Twierdzenie 10.13. [Kryterium d'Alemberta – wersja graniczna]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach dodatnich oraz niech istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Wtedy

- jeśli $q < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- jeśli $q > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 zadanie domowe!

W przypadku $q = 1$ wersja graniczna kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga o zbieżności szeregu: szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny (policz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dla szeregów z przykładu 9.3 (2) i (3)).

Przykład 10.14.

- ❶ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ jest zbieżny, ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

- ❷ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ jest rozbieżny, ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1.$$

- ❸ 📖 Kolejny przykład na wykładzie!

Następne kryterium nosi nazwę dwóch francuskich matematyków A. Cauchy'ego i J. Hadamarda, w Polsce jest znane jako kryterium Cauchy'ego.

Twierdzenie 10.15. [Kryterium Cauchy'ego]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach nieujemnych.

- Jeśli istnieją liczba $q < 1$ i liczba naturalna n_0 takie, że $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ dla $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- Jeśli istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ dla $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Twierdzenie 10.16. [Kryterium Cauchy'ego – wersja graniczna]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach nieujemnych oraz niech istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Wtedy

- jeśli $q < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- jeśli $q > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 **zadanie domowe!**

W przypadku $q = 1$ wersja graniczna kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga o zbieżności szeregu: szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny.

Przykład 10.17. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n}$ jest zbieżny, ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n \cdot \frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1. \end{aligned}$$

📖 Kolejny przykład na wykładzie!

Uwaga

- Przypadek $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest nierozstrzygalny zarówno dla wersji granicznej kryterium d'Alemberta, jak i kryterium Cauchy'ego. Można jednak pokazać, że jeśli zbieżność szeregu wynika z kryterium d'Alemberta, to będzie także wynikać z kryterium Cauchy'ego (por. lista zadań z szeregów). Twierdzenie odwrotne na ogół nie jest prawdziwe, ponieważ kryterium Cauchy'ego jest silniejsze.
- Zastosowanie kryterium d'Alemberta i Cauchy'ego do uogólnionego szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ nie rozstrzyga jego zbieżności. Jednak zbieżność szeregu harmonicznego w zależności od parametru α jest znana (por. wniosek 10.10). Dlatego jeśli oba te kryteria zastosowane do pewnego szeregu $\sum a_n$ nie rozstrzygają jego zbieżności, to można próbować porównywać ten szereg z szeregiem harmonicznym (por. kryteria porównawcze).

W przypadkach kiedy podane kryteria zawodzą, trzeba sięgnąć do bardziej wysublimowanych kryteriów, opartych na porównywaniu badanego szeregu nie z szeregiem geometrycznym, ale z innymi szeregami o znanej zbieżności, np. z uogólnionymi szeregami harmonicznymi. Takim kryterium jest np. kryterium Raabego.

Twierdzenie 10.18. [Kryterium Raabego]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach dodatnich oraz niech $r > 1$.

- Jeśli istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$ dla wszystkich $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- Jeśli istnieje liczba naturalna n_0 taka, że $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ dla $n > n_0$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 **na wykładzie!**

Twierdzenie 10.19. [Kryterium Raabego – wersja graniczna]

Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem liczbowym o wyrazach dodatnich oraz niech istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Wtedy

- jeśli $r > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny;
- jeśli $r < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Dowód: 📖 **zadanie domowe!**

Kryterium Raabego jest znacznie silniejsze od kryterium d'Alemberta. Zauważmy, że jeśli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, to ciąg o wyrazach $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} - 1 \right)$ ma granicę $r = +\infty$ dla $q < 1$ i $r = -\infty$ dla $q > 1$. Jeżeli więc kryterium d'Alemberta rozstrzyga kwestię zbieżności danego szeregu, to kryterium Raabego też!

W przypadku $r = 1$ wersja graniczna kryterium Raabego nie daje odpowiedzi na pytanie o zbieżność szeregu. W podobnych przypadkach trzeba korzystać z jeszcze bardziej wysublimowanych kryteriów.

Przykład 10.20.  Na wykładzie!

11 Szeregi o wyrazach dowolnych

Najczęściej stosowanym kryterium zbieżności szeregów o wyrazach dowolnych jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.1. [Kryterium Dirichleta]

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami liczbowymi. Jeśli

- ciąg (a_n) jest monotoniczny,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
- ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ jest ograniczony,

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód:  na wykładzie!

Jeśli jako (b_n) weźmiemy ciąg naprzemienny, tzn. $b_n = (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymujemy tzw. *szereg naprzemienny* $\sum (-1)^n a_n$ i jako natychmiastowy wniosek z kryterium Dirichleta dostajemy następujące kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych.

Wniosek 11.2. [Kryterium Leibniza]

Szereg naprzemienny

$$\sum (-1)^n a_n$$

jest zbieżny, jeśli (a_n) jest ciągiem monotonicznym i zbieżnym do zera.

Kolejne kryterium otrzymamy obniżając założenia dotyczące ciągu (a_n) , już nie musi być ciągiem zbieżnym do zera, wystarczy ograniczoność. Natomiast zwiększamy założenia dotyczące ciągu (b_n) , szereg o takich wyrazach musi być zbieżny, czyli zbieżny musi być jego ciąg sum częściowych. W kryterium Dirichleta wystarczała ograniczoność tego ciągu.

Wniosek 11.3. [Kryterium Abela]

Jeśli ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, a szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

12 Zbieżność bezwzględna szeregów

W przypadku szeregów $\sum a_n$ o wyrazach dowolnych można również stawiać sobie pytanie o zbieżność szeregu $\sum |a_n|$.

Definicja 12.1. Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest *zbieżny bezwzględnie*, jeśli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$.

Twierdzenie 12.2. Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny. Ponadto zachodzi nierówność

$$\left| \sum a_n \right| \leq \sum |a_n|.$$

Dowód:  na wykładzie!

Uwaga. Ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ nie wynika jego zbieżność bezwzględna. Kryterium Leibniza pozwala skonstruować wiele przykładów szeregów zbieżnych, które nie są bezwzględnie zbieżne. Wystarczy wziąć dowolny szereg $\sum a_n$ rozbieżny, którego wyrazy maleją do zera, aby szereg $\sum (-1)^n a_n$ był zbieżny, ale nie był bezwzględnie zbieżny.

Przykład 12.3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny, co wynika z twierdzenia 11.2, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (por. przykład 9.3 (2)).

☞ Kolejny przykład na wykładzie!

Szereg $\sum |a_n|$ jest oczywiście szeregiem o wyrazach nieujemnych, w związku z tym do badania zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum a_n$ można wykorzystywać wszystkie kryteria przedstawione w rozdziale 10.1.

13 Zbieżność bezwarunkowa szeregów

W szeregu liczbowym zbieżnym możemy kolejne wyrazy dowolnie łączyć w grupy. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13.1. [Prawo łączności dla szeregów]

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym, a $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, gdzie $n_1 = 0$ oraz niech $b_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$ dla $k \in \mathbb{N}^*$. Wówczas szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ponadto, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód: ☞ na wykładzie!

Dla szeregów rozbieżnych analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe. Rozważmy przykładowo rozbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, tzn. łącząc po jednym wyrazie dostajemy szereg rozbieżny. Ale gdy łączymy po dwa wyrazy dostajemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{2k-1} + (-1)^{2k} \right) = 0 \quad \text{lub} \quad -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{2k} + (-1)^{2k+1} \right) = -1.$$

Pokazaliśmy zatem, że w każdym szeregu zbieżnym można dowolnie łączyć kolejne wyrazy w grupy i zawsze uzyskamy szereg zbieżny. Teraz pokażemy, że zbieżność szeregu na ogół zależy od porządku jego wyrazów. Jest to, więc sytuacja odmienna od zbieżności ciągu, gdzie zmiana porządku wyrazów nie wpływa na zbieżność (por. twierdzenie 8.5). Wprowadzamy jeszcze jedną definicję.

Definicja 13.2. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *bezw warunkowo zbieżny*, jeżeli dla dowolnej permutacji (bijekcji) π zbioru liczb naturalnych zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$. Szereg zbieżny, który nie spełnia warunku bezwarunkowej zbieżności nazywamy szeregiem *warunkowo zbieżnym*.

Dla szeregów o wszystkich wyrazach nieujemnych (niedodatnich) jest oczywiste, że kolejność sumowania nie gra roli, tzn. zachodzi następujący lemat.

Lemat 13.3. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym. Jeśli $a_n \geq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}^*$ lub $a_n \leq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}^*$, to szereg jest zbieżny bezwarunkowo. Ponadto dla każdej permutacji π zbioru liczb naturalnych mamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Dowód: ☞ na wykładzie!

Natomiast gdy rozpatrujemy szeregi o wyrazach dowolnych, to sytuacja jest zupełnie inna. Prawdziwe są jednak następujące twierdzenia.

Twierdzenie 13.4. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem liczbowym oraz niech

$$\beta_n = \max\{0, a_n\} \quad \text{ i } \quad \gamma_n = \min\{0, a_n\}$$

dla $n \in \mathbb{N}^*$.

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ są zbieżne.

Dowód: Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ są zbieżne, to z lematu 13.3 wynika, że są one zbieżne bezwarunkowo. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest więc także zbieżny bezwarunkowo, ponieważ dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}^*$ zachodzi $a_n = \beta_n + \gamma_n$ i dla dowolnej bijekcji $\pi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ jest sumą szeregów zbieżnych $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\pi(n)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\pi(n)}$.

Założmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo. Wtedy jest on zbieżny i z warunku koniecznego 9.6 wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, a zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Stąd istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$-M < \gamma_n \leq 0 \quad \text{ dla } n \in \mathbb{N}^*.$$

Przypuśćmy, że co najmniej jeden z szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ jest rozbieżny.

Niech (S_n) , (B_n) i (G_n) będą ciągami sum częściowych odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$. Wtedy ciąg (B_n) jest niemalejący, zaś ciąg (G_n) jest nierosnący. Zatem z twierdzenia 10.1 wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = +\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = -\infty$. Ponieważ $S_n = B_n + G_n$ dla $n \in \mathbb{N}^*$ i ciąg (S_n) jest zbieżny, więc musi zachodzić

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = +\infty \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = -\infty.$$

Zdefiniujmy teraz następujące zbiory

$$X := \{n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0\} \quad \text{ i } \quad Y := \{n \in \mathbb{N}^* : a_n \leq 0\}$$

i zauważmy, że są one przeliczalne oraz $X \cap Y = \emptyset$ i $X \cup Y = \mathbb{N}^*$.

Ponadto istnieje taki rosnący ciąg liczb całkowitych $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, gdzie $n_0 = 0$, że

$$\sum_{\substack{n_{k-1} < n \leq n_k \\ n \in X}} a_n > 2M$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}^*$. Zatem zbiory $X_k := \{n \in X : n_{k-1} < n \leq n_k\}$, gdzie $k \in \mathbb{N}^*$, tworzą rodzinę zbiorów skończonych, niepustych i takich, że

- i) $X_k \cap X_j = \emptyset$ dla $k \neq j$,
- ii) $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} X_k$,
- iii) $\sum_{n \in X_k} a_n > 2M$ dla $k \in \mathbb{N}^*$.

Oznaczmy przez m_k ilość elementów zbioru X_k . Ponadto niech

$$N_1 := 1 \quad \text{ i } \quad N_k := k + \sum_{j=1}^k m_j \quad \text{ dla } k \geq 2$$

oraz

$$V_k := \{n \in \mathbb{N}^* : N_k + 1 \leq n \leq N_k + m_k\} \quad \text{ dla } k \in \mathbb{N}^*.$$

Zauważmy teraz, że X_k i V_k są zbiorami m_k -elementowymi, zatem istnieje bijekcja $f_k : V_k \rightarrow X_k$ dla $k \in \mathbb{N}^*$. Niech teraz $V := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$. Ponieważ zbiory V_k są, podobnie jak zbiory X_k , parami rozłączne, to funkcja

$$f : \begin{cases} V & \longrightarrow & X \\ n & \longmapsto & f_k(n) \end{cases} \quad \text{dla } n \in V_k$$

jest bijekcją.

Oznaczmy teraz przez $W := \mathbb{N}^* \setminus V$, wtedy $W = \{N_k : k \in \mathbb{N}^*\}$. Ponieważ W i Y są zbiorami przeliczalnymi, to istnieje bijekcja $g : W \rightarrow Y$.

Zdefiniujmy teraz funkcję $\pi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ następującym wzorem

$$\pi(n) := \begin{cases} f(n) & \text{dla } n \in V, \\ g(n) & \text{dla } n \in W. \end{cases}$$

Funkcja π jest oczywiście poprawnie określona, ponieważ $V \cap W = \emptyset$, oraz jest bijekcją, gdyż $\pi(V) = X$ i $\pi(W) = Y$.

Rozważmy następnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ i zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{m_k + N_k} a_{\pi(n)} = \sum_{n \in V_1 \cup \dots \cup V_k} a_{\pi(n)} + \sum_{\substack{n \in W \\ n \leq m_k + N_k}} a_{\pi(n)} = \sum_{j=1}^k \sum_{n \in V_j} a_{f_j(n)} + \sum_{j=1}^k a_{g(N_j)} \geq k \cdot 2M - kM = kM.$$

Wynika stąd, że sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ nie mają granicy skończonej, gdyż $\lim_{k \rightarrow \infty} kM = +\infty$. Jest to sprzeczne z naszym założeniem o bezwarunkowej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 13.5. [o zbieżności bezwzględnej i bezwarunkowej szeregu]

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód:  na wykładzie!

Twierdzenie 13.6. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwarunkowo, to dla każdej permutacji π zbioru liczb naturalnych mamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Dowód:  na wykładzie!

Uwaga: Z twierdzenia o zbieżności bezwzględnej i bezwarunkowej wynika natychmiast, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

Zaskakujący jest fakt, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny i $s \in \mathbb{R}$ jest dowolną liczbą, to istnieje taka permutacja π zbioru liczb naturalnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ jest zbieżny do s . Jest to treść tzw. Twierdzenia Riemanna.

14 Mnożenie szeregów

W twierdzeniu 9.4 mówiliśmy o dodawaniu szeregów zbieżnych oraz o mnożeniu szeregu zbieżnego przez skalar. Teraz zajmijmy się mnożeniem szeregów.

Niech będą dane szeregi zbieżne

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{ i } \quad B = \sum_{j=0}^{\infty} b_j.$$

Podobnie jak przy mnożeniu sum rozważmy iloczyny $a_i \cdot b_j$ wyrazów tych szeregów. Utworzony z nich szereg nazywa się **iloczynem szeregów** A i B :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i \cdot b_j = & a_0 \cdot b_0 & + & a_0 \cdot b_1 & + & a_0 \cdot b_2 & + & a_0 \cdot b_3 & + & \dots \\ & a_1 \cdot b_0 & + & a_1 \cdot b_1 & + & a_1 \cdot b_2 & + & a_1 \cdot b_3 & + & \dots \\ & a_2 \cdot b_0 & + & a_2 \cdot b_1 & + & a_2 \cdot b_2 & + & a_2 \cdot b_3 & + & \dots \\ & a_3 \cdot b_0 & + & a_3 \cdot b_1 & + & a_3 \cdot b_2 & + & a_3 \cdot b_3 & + & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}$$

Dla ułatwienia możemy go zapisać w postaci nieskończonej macierzy prostokątnej.

Istnieją co najmniej cztery różne, ale podobne sposoby ustawienia iloczynów $a_i \cdot b_j$ w ciąg lub inaczej mówiąc sumowania wyrazów tego szeregu:

- wzdłuż kolumn: $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b_j \right)$;
- wzdłuż wierszy: $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_i \cdot b_j \right)$;
- po bokach kwadratu: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i,j=0}^n a_i \cdot b_j \right)$;
- po przekątnych: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j \right)$.

Jeżeli szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, to na podstawie twierdzenia 13.5 ma własność przemienności i jest to obojętne, który sposób wybierzemy.

Do wyznaczania sumy takiego szeregu wygodniej jest zastosować trzeci sposób, czyli sumowanie po bokach kwadratu, ponieważ wtedy sumy częściowe tego szeregu są iloczynem odpowiednich sum częściowych szeregów A i B , zatem dążą do iloczynu $A \cdot B$.

Przy praktycznym mnożeniu szeregów najczęściej wygodnie jest zastosować czwarty sposób, czyli ustawiać iloczyny $a_i \cdot b_j$ po przekątnych. W tej właśnie postaci przedstawił Cauchy po raz pierwszy iloczyn dwóch szeregów i ten sposób omówimy teraz dokładnie.

Definicja 14.1. [Iloczyn szeregów w sensie Cauchy'ego]

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami liczbowymi. **Iloczynem Cauchy'ego** tych szeregów nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \quad \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Iloczyn szeregów w sensie Cauchy'ego jest przemienny.



Twierdzenie 14.2. [Mertensa]

Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne i jeśli przynajmniej jeden z tych szeregów jest zbieżny bezwzględnie, to iloczyn Cauchy'ego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ tych szeregów jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Dowód: 📖 na wykładzie!

W twierdzeniu Mertensa założenia, że przynajmniej jeden z szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ lub $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, nie można opuścić. Rozważmy mianowicie zbieżny warunkowo szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Wtedy dla iloczynu Cauchy'ego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mamy

$$|c_n| = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{j+1} \cdot \sqrt{n-j+1}} \geq \sum_{j=0}^n \frac{1}{n+1} = 1,$$

z czego wynika, że jest to szereg rozbieżny.

Przykład 14.3. Rozważmy szereg

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \stackrel{\text{ozn}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Pokazać, że:

- ❶ Szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
- ❷ $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$;
- ❸ $\exp(0) = 1$;
- ❹ $\exp(1) = e$ (por. lista „Ciężki liczbowe – zbieżność”);
- ❺ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- ❻ $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exp(n) = e^n$;
- ❼ $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exp(-n) = e^{-n}$;
- ❽ $\forall_{r \in \mathbb{Q}} \exp(r) = e^r$.

Część IV

Ciągłość funkcji

W tym rozdziale zajmiemy się funkcjami określonymi na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

W tym miejscu warto przypomnieć sobie definicję funkcji oraz takie terminy jak dziedziną funkcji, zbiór wartości funkcji na danym zbiorze, monotoniczność, parzystość czy okresowość funkcji (por. rozdział 4). Natomiast naszym celem teraz będzie wyjaśnienie pojęcia ciągłości funkcji. Najpierw jednak musimy dobrze zrozumieć, co to jest granica funkcji w punkcie.

15 Granica funkcji

Jak zwykle zaczniemy od kilku definicji, które ułatwią nam zapis kolejnych wprowadzanych pojęć.

Definicja 15.1. Niech $\varepsilon > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

- *Otoczeniem* punktu a o *promieniu* ε nazywamy przedział otwarty

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$



- Każdy zbiór $\mathcal{O}$, dla którego istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\mathcal{O}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{O}$, będziemy nazywać po prostu *otoczeniem* punktu a .

Zauważmy, że

$$x \in \mathcal{O}_\varepsilon(a) \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff |x - a| < \varepsilon,$$

zatem otoczenie punktu a o promieniu ε jest zbiorem punktów, których odległość od a jest mniejsza od ε :

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

W zbiorze liczb rzeczywistych wprowadza się także otoczenia prawostronne i lewostronne.

Definicja 15.2. Niech $a \in \mathbb{R}$.

- *Otoczeniem prawostronnym* a o promieniu ε nazywamy przedział

$$\mathcal{O}_\varepsilon^+(a) := [a, a + \varepsilon).$$

- *Otoczeniem lewostronnym* a o promieniu ε nazywamy przedział

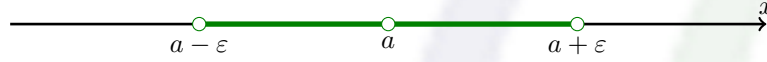
$$\mathcal{O}_\varepsilon^-(a) := (a - \varepsilon, a].$$

Jeśli promień otoczenia ε nie jest istotny i może być dowolną liczbą dodatnią, to powyższe otoczenia będziemy oznaczać odpowiednio następującymi symbolami: $\mathcal{O}(a)$, $\mathcal{O}^+(a)$, $\mathcal{O}^-(a)$.

Definicja 15.3. Niech $\varepsilon > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

Sąsiedztwem punktu a o *promieniu* ε nazywamy zbiór

$$\mathcal{S}_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$



Zauważmy, że do sąsiedztwa punktu a o promieniu ε należą wszystkie punkty otoczenia tego punktu o tym samym promieniu z wyjątkiem punktu a :

$$\mathcal{S}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}.$$

Analogicznie, jak w przypadku otoczenia, możemy także mówić o sąsiedztwach prawo- i lewostronnych.

Definicja 15.4. Niech $a \in \mathbb{R}$.

- *Sąsiedztwo prawostronne* a o promieniu ε nazywamy przedział otwarty

$$\mathcal{S}_\varepsilon^+(a) := (a, a + \varepsilon).$$

- *Sąsiedztwo lewostronne* a o promieniu ε nazywamy przedział otwarty

$$\mathcal{S}_\varepsilon^-(a) := (a - \varepsilon, a).$$

Jeśli promień sąsiedztwa ε nie jest istotny i może być dowolną liczbą dodatnią, to powyższe otoczenia będziemy oznaczać odpowiednio następującymi symbolami: $\mathcal{S}(a)$, $\mathcal{S}^+(a)$, $\mathcal{S}^-(a)$.

Zauważmy, że w świetle definicji otoczenia, pojęcie granicy ciągu można rozumieć następująco:

granicą ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ jest punkt $a \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ punktu a prawie wszystkie wartości ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ należą do $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 (a_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(a)).$$

✎ Pisząc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ rozumiemy, że wszystkie wartości ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ należą do zbioru X .

Wprowadźmy teraz kolejne ważne pojęcie.

Definicja 15.5. [Punkt skupienia zbioru]

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$. Mówimy, że $a \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru X , gdy dla każdego sąsiedztwa $\mathcal{S}$ punktu a zbiór $X \cap \mathcal{S}$ jest niepusty.

Punkt $a \in X$, który nie jest punktem skupienia zbioru X , nazywamy *punktem izolowanym* tego zbioru.

✎ W powyższej definicji używamy sąsiedztwa $\mathcal{S}$, a nie otoczenia $\mathcal{O}$ punktu a , żeby wykluczyć sytuację, w której $X \cap \mathcal{O} = \{a\}$.

Bezpośrednio z definicji pokazujemy

Własność 15.6. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Wówczas a jest punktem skupienia zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

✎ Zauważmy, że punkt skupienia danego zbioru może, ale nie musi być jego elementem!

Jesteśmy już gotowi do wprowadzenie pojęcia granicy funkcji w punkcie.

Definicja 15.7. [Cauchy'ego]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Cauchy'ego* funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru D_f ,
- dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } x \in D_f \cap \mathcal{S}_\delta(a).$$

Notacja: $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ lub $f(x) \rightarrow g$ dla $x \rightarrow a$.

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ oraz niech $g \in \mathbb{R}$, a a niech będzie punktem skupienia zbioru D_f . Definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie a można zapisać następująco:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right).$$

Definicja 15.8. [Heinego]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Heinego* funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru D_f ,
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_f \setminus \{a\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Pokażemy teraz, że powyższe dwie definicje są równoważne.

Twierdzenie 15.9. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D_f \subseteq \mathbb{R}$, niech a będzie punktem skupienia zbioru D_f oraz niech $g \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ g jest granicą w sensie Cauchy'ego funkcji f w punkcie a ,
- ❷ g jest granicą w sensie Heinego funkcji f w punkcie a .

Dowód: 📖 na wykładzie!

Uwaga Warto zwrócić uwagę na fakt, że istnienie granicy funkcji f w punkcie a i jej liczbowa wartość g nie mają żadnego związku z wartością, a nawet z określonością funkcji f w punkcie a .

Jeżeli funkcja f jest określona na zbiorach nieograniczonych z góry lub odpowiednio z dołu, to definicja Heinego granicy funkcji ma sens również dla „ $a = +\infty$ ” („ $a = -\infty$ ”). Po prostu rozważamy wtedy ciągi argumentów (x_n) takie, że $x_n \rightarrow +\infty$ lub odpowiednio $x_n \rightarrow -\infty$.

Definicja 15.10. [Heinego]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą.

a) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Heinego* funkcji f w $+\infty$, jeśli:

- istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $(a, \infty) \subseteq D_f$ oraz
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_f$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Notacja: $g = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.



b) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Heinego* funkcji f w $-\infty$, jeśli:

- istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $(-\infty, b) \subseteq D_f$ oraz
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_f$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Notacja: $g = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Definicja 15.11. [Cauchy'ego]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą.

a) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Cauchy'ego* funkcji f w $+\infty$, jeśli:

- istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $(a, \infty) \subseteq D_f$ oraz
- $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in D_f \left(x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$.

b) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą w sensie Cauchy'ego* funkcji f w $-\infty$, jeśli:

- istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $(-\infty, b) \subseteq D_f$ oraz
- $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in D_f \left(x < m \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$.

15.1 Granice jednostronne funkcji

Definicja 15.12. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą oraz niech $a, g \in \mathbb{R}$.

a) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą prawostronną* funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $\{x \in D_f: x > a\}$ oraz
- w notacji Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \left(x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$$

lub równoważnie w notacji Heinego:

$$\forall (x_n) \subseteq \{x \in D_f: x > a\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \right).$$

Notacja: $g = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ lub $g = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$.

b) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą lewostronną* funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{R}$, jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru $\{x \in D_f: x < a\}$ oraz
- w notacji Cauchy'ego:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \left(x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$$

lub równoważnie w notacji Heinego:

$$\forall (x_n) \subseteq \{x \in D_f: x < a\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \right).$$

Notacja: $g = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ lub $g = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$.

Twierdzenie 15.13. [Związek granicy funkcji z granicami jednostronnymi]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą, punkt $a \in \mathbb{R}$ niech będzie punktem skupienia zbiorów $\{x \in D_f: x < a\}$ i $\{x \in D_f: x > a\}$ oraz niech $g \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$,
- ❷ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$ oraz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$.

Dowód:  na wykładzie!

15.2 Granice niewłaściwe

Sprecyzujmy jeszcze, co będziemy rozumieli pod pojęciem granicy niewłaściwej. Definicję Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji f w punkcie a można sformułować w następujący sposób.

Definicja 15.14. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą oraz niech $a \in \mathbb{R}$.

a) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in \mathbb{R}$ *granice niewłaściwą $+\infty$* , jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru D_f ,
- dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$f(x) > M \quad \text{dla wszystkich } x \in D_f \cap S_\delta(a).$$

Notacja: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

b) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in \mathbb{R}$ *granice niewłaściwą $-\infty$* , jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru D_f ,
- dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$f(x) < M \quad \text{dla wszystkich } x \in D_f \cap S_\delta(a).$$

Notacja: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Definicję Heinego granicy niewłaściwej funkcji f w punkcie a formułuje się w sposób następujący.

Definicja 15.15. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $a \in \mathbb{R}$ *granice niewłaściwą $\pm\infty$* , jeśli:

- a jest punktem skupienia zbioru D_f ,
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_f \setminus \{a\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \pm\infty.$$

Zadanie: Jako ćwiczenie zostawiam Państwu zapisanie definicji granicy niewłaściwej lewostronnej i prawostronnej funkcji w punkcie oraz granicy niewłaściwej funkcji w $\pm\infty$.

15.3 Własności granicy funkcji

Dzięki definicji Heinego i twierdzeniu 15.9 możemy teraz przenieść pewne własności granicy ciągów na przypadek granicy funkcji. Te same są też symbole nieoznaczone i podobne są sposoby obliczania takich granic.

Z twierdzeń 8.6 i 8.15 dostajemy natychmiast:

Wniosek 15.16. [Jednoznaczność granicy funkcji]

Jeśli $g_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ i $g_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ są granicami funkcji rzeczywistej f w punkcie a , to $g_1 = g_2$.

Podobnie w sposób jednoznaczny wyznaczona jest granica funkcji w $\pm\infty$.

Z twierdzenia 8.8 wynika natomias:

Wniosek 15.17. [o granicach dwóch funkcji]

Niech $f, g: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami, a punktem skupienia zbioru D oraz niech $p, q \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$ oraz

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{dla } x \in D \cap S_\delta(a),$$

gdzie $S_\delta(a)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu a , to $p \leq q$.

A z twierdzenia 8.16 mamy odpowiednik powyższego twierdzenia dla granic niewłaściwych.

Wniosek 15.18. [o granicach niewłaściwych dwóch funkcji]

Niech $f, g: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami, a punktem skupienia zbioru D oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in D \cap S_\delta(a)$, gdzie $S_\delta(a)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu a .

a) Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

b) Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Dla granic funkcji prawdziwe jest także następujące twierdzenie (por. twierdzenie 8.27):

Twierdzenie 15.19. [o trzech funkcjach]

Niech $f, g, h: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami, a niech będzie punktem skupienia zbioru D oraz niech $p \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje f , g i h spełniają warunki:

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego $x \in D \cap S_\delta(a)$, gdzie $S_\delta(a)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu a ;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = p$,

to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = p$.

oraz (por. twierdzenia 8.20 i 8.34)

Twierdzenie 15.20. [o arytmetyce granic funkcji]

Niech $f, g: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami, a niech będzie punktem skupienia zbioru D oraz niech $p, q \in \mathbb{R}$. Niech ponadto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = q.$$

Wówczas

a)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = p \pm q;$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = p \cdot q,$$

w szczególności

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot p,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$;

c)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q},$$

jeśli $q \neq 0$;

d)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = p^q,$$

o ile $p > 0$ i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in D \cap S_\delta(a)$;

e)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = 0,$$

o ile $p = 0$, $q > 0$ i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in D \cap S_\delta(a)$,gdzie $S_\delta(a)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu a .

Powyższe twierdzenia prawdziwe są również, gdy pojawiają się granice niewłaściwe, z wyjątkiem znanych nam z teorii granic ciągów symboli nieoznaczonych:

$$[0 \cdot \infty], \quad [\infty - \infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0].$$

W pozostałych przypadkach, w których pojawiają się symbole $+\infty$ lub $-\infty$ czy liczba 0 w mianowniku ułamka należy kierować się tabelkami w uwagach 8.25 i 8.37.

15.4 Granice specjalne

Definicja Heinego granicy funkcji pozwala na bezpośrednie ustalenie wartości kilku bardzo ważnych w zastosowaniach granic funkcji w punkcie 0.

Własności 15.21.

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, gdzie $a > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Uzasadnienie: zostawiam Państwu jako  **zadanie domowe**. Proszę skorzystać z Wniosków 8.40, 8.41 oraz z granic specjalnych dla ciągów podanych tylko na wykładzie!

Ponadto (**tylko**) na wykładzie zostanie podane twierdzenie o granicy funkcji złożonej i wynikające z niego uogólnienia powyższych granic specjalnych. Oczywiście temat ten będzie obowiązywał na egzaminie.

15.5 Asymptoty wykresu funkcji

Pojęcie granicy funkcji możemy wykorzystać do zdefiniowania i wyznaczania tzw. asymptot³ wykresu funkcji rzeczywistej, czyli prostych, których odległość od wykresu funkcji jest dowolnie mała w dostatecznie dużej odległości od początku układu współrzędnych. Asymptoty są ważnym narzędziem w analizie zachowania przebiegu funkcji i ich wykresów, pozwalają dokonać pewnych uproszczeń, przykładowo w badaniu funkcji opisujących skomplikowane procesy fizyczne lub chemiczne.

Definicja 15.22. *Asymptota wykresu funkcji* to prosta mająca tę własność, że jeśli punkt przesuwać się wzdłuż wykresu funkcji oddala się od początku układu współrzędnych w sposób nieograniczony, to jego odległość od tej prostej maleje do zera.

Ze względów praktycznych wynikających ze sposobu obliczania wyróżniamy trzy rodzaje asymptot:

- Asymptoty pionowe;
- Asymptoty poziome;
- Asymptoty ukośne.

15.5.1 Asymptoty pionowe

Wykres funkcji może mieć asymptoty, które są prostymi pionowymi. Takie asymptoty w oczywisty sposób nazywane są asymptotami pionowymi. Poniżej formułujemy warunki, które musi spełniać prosta, aby być asymptotą pionową.

Definicja 15.23. Niech $f: \mathbb{R} \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Prosta o równaniu $x = a$ jest *asymptotą pionową lewostronną* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w lewostronnym sąsiedztwie punktu $x = a$ oraz jej granica lewostronna w tym punkcie jest niewłaściwa, tzn.:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

- b) Prosta o równaniu $x = a$ jest *asymptotą pionową prawostronną* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x = a$ oraz jej granica prawostronna w tym punkcie jest niewłaściwa, tzn.:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

- c) Prosta o równaniu $x = a$ jest *asymptotą pionową obustronną* wykresu funkcji f , jeśli jest ona jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

☞ Funkcja ciągła (zob. Definicja 16.3) może mieć asymptotę pionową jedynie w punktach, które nie należą do dziedziny, ale są jej punktami skupienia.

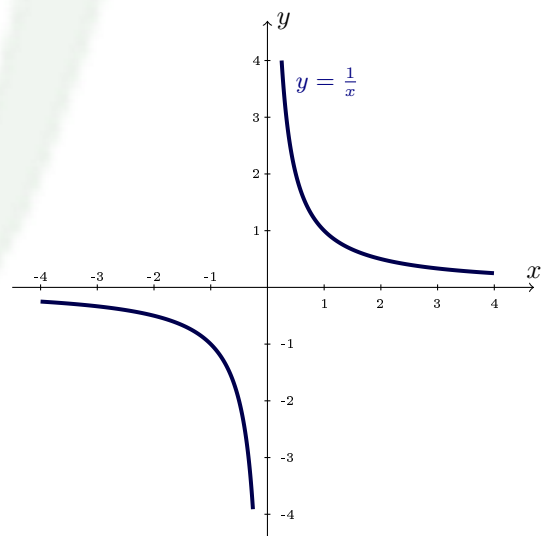
Przykład 15.24.

Niech $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

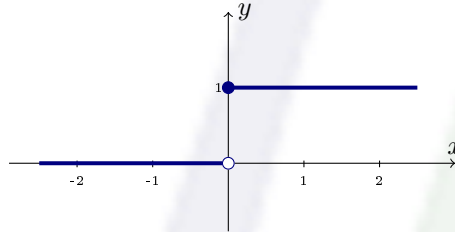
zatem funkcja f nie ma granicy w punkcie 0, a prosta $x = 0$ (oś Oy) jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f .



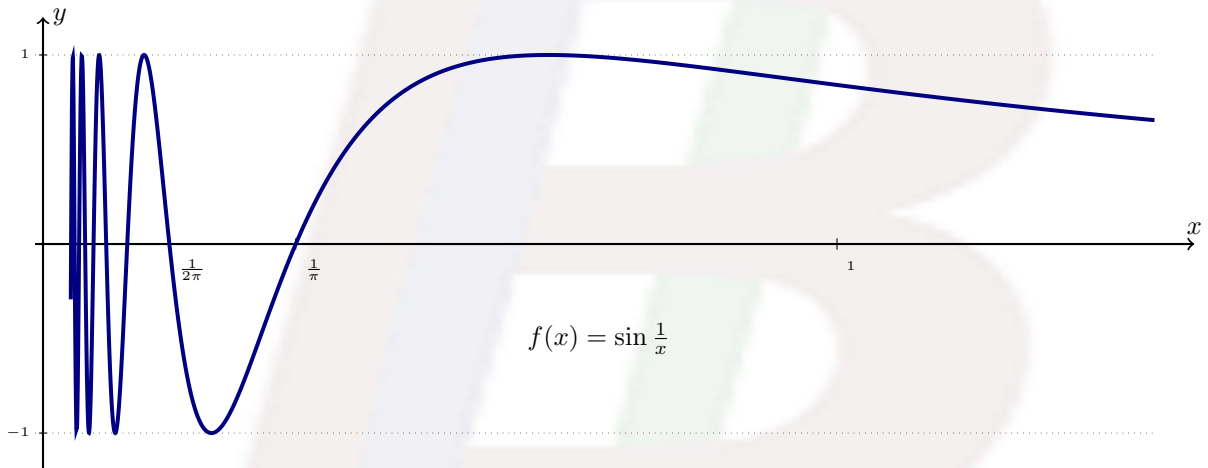
³ Apoloniusz z Perga (ok. 260 p.n.e. – ok. 190 p.n.e.), grecki matematyk i astronom, jako pierwszy użył pojęcia *asymptota* w swoim dziele *Κωνικά* (*Stożkowa*), poświęconym krzywym stożkowymi.

Uwaga Spróbujmy się zastanowić, jak może wyglądać wykres funkcji w sąsiedztwie wybranego punktu a , jeśli granica funkcji w tym punkcie nie jest niewłaściwa, czyli prosta $x = a$ nie jest asymptotą pionową. Rozważmy dwie możliwości:

- ❶ Jeśli funkcja f ma w punkcie a właściwą granicę lewostronną (g^-) i prawostronną (g^+), ale nie są one równe, to na wykresie funkcji widoczny jest *skok* wysokości $|g^- - g^+|$. Ten przypadek zachodzi dla funkcji Heaviside'a w punkcie $x = 0$:



- ❷ Jeśli natomiast granica prawostronna lub lewostronna funkcji f w punkcie a nie istnieje, to bardzo trudno narysować wykres funkcji w sąsiedztwie takiego punktu. Tak się dzieje na przykład w punkcie $x = 0$ dla funkcji $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \sin \frac{1}{x}$:



15.5.2 Asymptoty poziome

Wykres funkcji może mieć także asymptoty, które są prostymi poziomymi, czyli współczynnik kierunkowy w ich równaniu równy jest zero. Takie asymptoty w oczywisty sposób nazywane są asymptotami poziomymi. Poniżej formułujemy warunki, które musi spełniać prosta, aby być asymptotą poziomą.

Definicja 15.25. Niech $f: \mathbb{R} \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Prosta o równaniu $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, jest *asymptotą poziomą w $-\infty$ (lewostronną)* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w lewostronnie nieograniczonym przedziale $(-\infty, k)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

- b) Prosta o równaniu $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, jest *asymptotą poziomą w $+\infty$ (prawostronną)* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w prawostronnie nieograniczonym przedziale $(k, +\infty)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

- c) Prosta o równaniu $y = b$ jest *asymptotą poziomą* obustronną wykresu funkcji f , jeśli jest ona jednocześnie asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną.

☞ Każda funkcja ma co najwyżej jedną asymptotę poziomą w $-\infty$ i co najwyżej jedną asymptotę poziomą w $+\infty$.

Przykład 15.26.

Niech $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R}$.

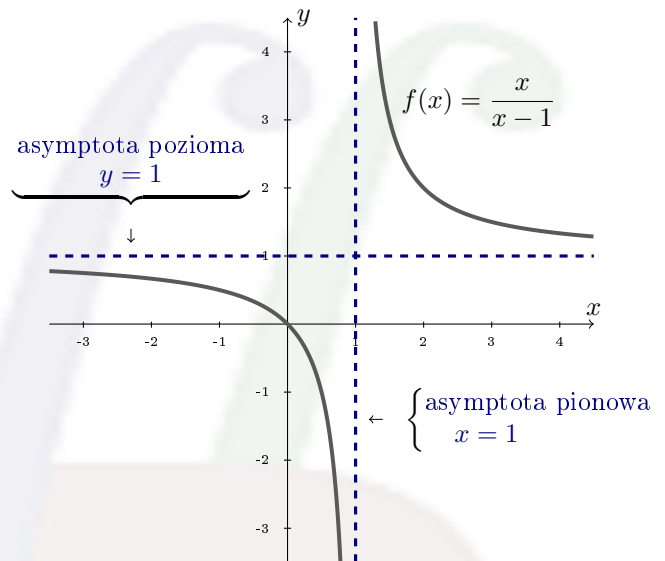
Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

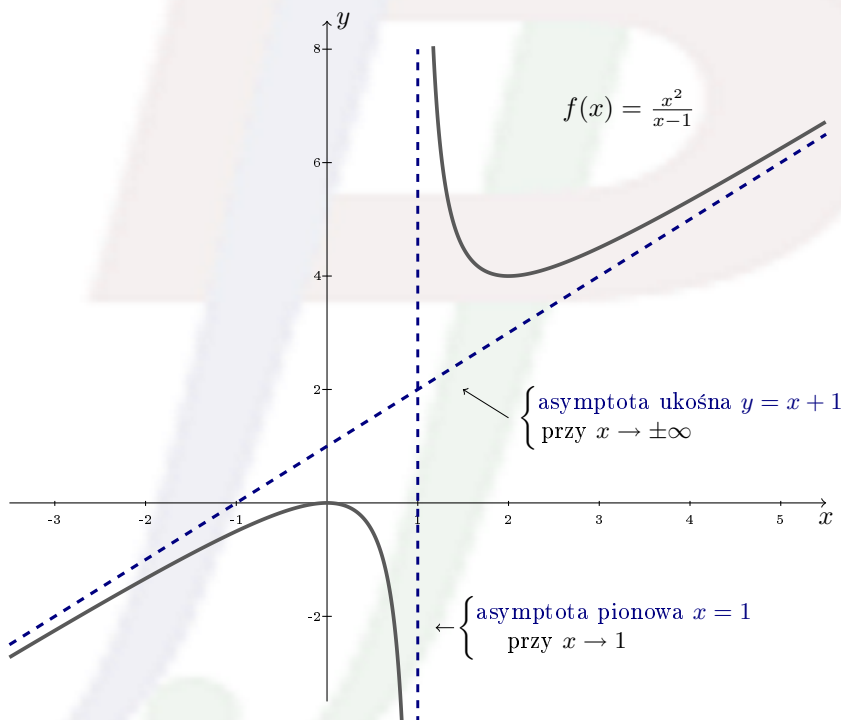
zatem prosta $y = 1$ asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $-\infty$ i w $+\infty$.

Możemy również wykazać, że wykres f będzie miał obustronną asymptotę pionową o równaniu $x = 1$, bo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty,$$

**15.5.3 Asymptoty ukośne**

W przypadku właściwej granicy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, czyli gdy wykres funkcji nie ma asymptoty poziomej, może się jednak okazać, że ten wykres zbliża się do pewnej prostej o niezerowym współczynniku kierunkowym. Taką prostą będziemy nazywać *asymptotą ukośną*.



Definicja 15.27. Niech $f: \mathbb{R} \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze D_f nieograniczonym z dołu lub odpowiednio z góry.

- a) Prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest *asymptotą ukośną w $-\infty$ (lewostronną)* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w lewostronnie nieograniczonym przedziale $(-\infty, k)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

- b) Prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest *asymptotą ukośną w $+\infty$ (prawostronną)* wykresu funkcji f , jeśli funkcja f jest określona w prawostronnie nieograniczonym przedziale $(k, +\infty)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

- c) Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest *asymptotą ukośną* obustronną wykresu funkcji f , jeśli jest ona jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną.

Zauważmy, że pojęcie asymptoty ukośnej jest uogólnieniem pojęcia asymptoty poziomej: jeżeli wykres funkcji ma asymptotę ukośną i wartość współczynnika kierunkowego a jest równa zero, to oznacza, że wykres ma asymptotę poziomą o równaniu $y = b$.

Przykład 15.28. Prosta o równaniu $y = x - 1$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6}$. Zauważmy bowiem, że

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} - (x - 1) \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{x^2 + x - 6} - \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + x - 6)}{x^2 + x - 6} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4x - x^3 - x^2 + 6x + x^2 + x - 6}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 6}{x^2 + x - 6} = 0. \end{aligned}$$

Definicja pozwala na bezpośrednie zweryfikowanie, czy prosta o danym równaniu jest asymptotą ukośną wykresu funkcji. Natomiast poniższe twierdzenie podaje praktyczny sposób wyznaczania równań takich asymptot. Z tego twierdzenia będziemy korzystać w zadaniach dotyczących wyznaczania asymptot ukośnych wykresu funkcji.

Twierdzenie 15.29.

- a) Niech funkcja f będzie określona w lewostronnie nieograniczonym przedziale $(-\infty, k)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną w $-\infty$ wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

- b) Niech funkcja f będzie określona w prawostronnie nieograniczonym przedziale $(k, +\infty)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest asymptotą ukośną w $+\infty$ wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Dowód: 📖 na wykładzie!

Uwaga

- Jeśli w powyższym twierdzeniu jedna z granic wyznaczających współczynniki a i b nie istnieje lub jest niewłaściwa, to wykres funkcji nie ma odpowiedniej asymptoty ukośnej.
- Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej $y = ax + b$ ze współczynnikiem kierunkowym $a = 0$, dlatego też jeśli istnieje asymptota pozioma lewostronna lub prawostronna, to nie badamy istnienia odpowiedniej asymptoty ukośnej.
- Każda funkcja ma co najwyżej jedną asymptotę ukośną w $-\infty$ i co najwyżej jedną asymptotę ukośną w $+\infty$.

Przykład 15.30. 📖 Na wykładzie!

Rozważane asymptoty pionowe, poziome i ukośne są prostymi, czyli tzw. *asymptotami prostopadkowymi*. Ale czasem rozważa się również *asymptoty krzywoliniowe*, np. parabole. Więcej na ten temat będziemy mówić na wykładzie z *Analizy Matematycznej 1*.

16 Funkcje ciągłe

Rozdział ten rozpoczniemy od definicji wnętrza dowolnego podzbioru zbioru liczb rzeczywistych. Pojęcie to, także w bardziej ogólnych przypadkach, będzie omawiane dokładnie w przyszłym semestrze na wykładzie ze *Wstępu do Topologii*.

Definicja 16.1. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Zbiór

$$D^\circ := \left\{ x \in D : \exists \varepsilon > 0 \ \mathcal{O}_\varepsilon(x) \subseteq D \right\},$$

gdzie $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ jest pewnym otoczeniem punktu x , nazywamy *wnętrzem* zbioru D .

Przykład 16.2.

- ❶ Niech $D = (a, b)$ będzie przedziałem otwartym. Wtedy $D^\circ = D$.
- ❷ Niech $D = [a, b]$, $(a, b]$ lub $[a, b)$. Wtedy $D^\circ = (a, b)$.
- ❸ Dla $D = \mathbb{N}$ mamy $D^\circ = \emptyset$.

Definicja 16.3. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą.

- a) Funkcję f nazywamy *ciągłą w punkcie $a \in D_f$* , jeśli jej granica w a istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- b) Funkcję f nazywamy *prawostronnie ciągłą w $a \in D_f$* , jeśli jej prawostronna granica w a istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

- c) Funkcję f nazywamy *lewostronnie ciągłą w $a \in D_f$* , jeśli jej lewostronna granica w a istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

- e) Funkcję f nazywamy *ciągłą w D_f* , jeśli f jest ciągła w każdym punkcie $a \in D_f^\circ$ i lewo- lub odpowiednio prawostronnie ciągła w $a \in D_f \setminus D_f^\circ$.

Uwaga

- Jeśli a jest punktem izolowanym zbioru D_f , to przyjmujemy, że f jest funkcją ciągłą w punkcie a .
- Zgodnie z definicją Heinego granicy funkcji w punkcie, ciągłość funkcji $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza, że dla dowolnego ciągu argumentów $(x_n) \subseteq D_f$ zachodzi równość

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Zapisana w tej postaci ciągłość jest pewnego rodzaju *regułą zamiany*: granicę i wzór funkcji **ciągłej** możemy zamienić kolejnością.

- Z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie wynika natychmiast lokalne zachowanie znaku przez funkcję ciągłą. Mianowicie, jeżeli $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i np. $a \in D_f$ jest takim punktem, że $f(a) > 0$, to istnieje takie otoczenie $\mathcal{O}_\delta(a)$ punktu a , na którym funkcja f też przyjmuje wartości dodatnie.

- Punkt a , w którym badamy ciągłość, **musi** należeć do dziedziny funkcji D_f (w przeciwieństwie do definicji granicy funkcji). Oznacza to, że wartość $f(a)$ musi istnieć.
- Intuicyjnie ciągłość funkcji oznacza, że wykres funkcji ciągłej **na przedziale** można narysować bez odrywania ołówka od kartki papieru. Ta zasada nie dotyczy jednak funkcji określonych na sumie rozłącznych przedziałów. Przykładowo funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w zbiorze $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ mimo, że jej wykres składa się z dwóch odrębnych łuków. Ponadto to intuicyjne podejście nie może jednak zastąpić definicji ciągłości, np. funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ jest ciągła na przedziale $(0, \infty)$, ale jej wykresu w otoczeniu zera nie można narysować.

Przykład 16.4.

Funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 1; \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

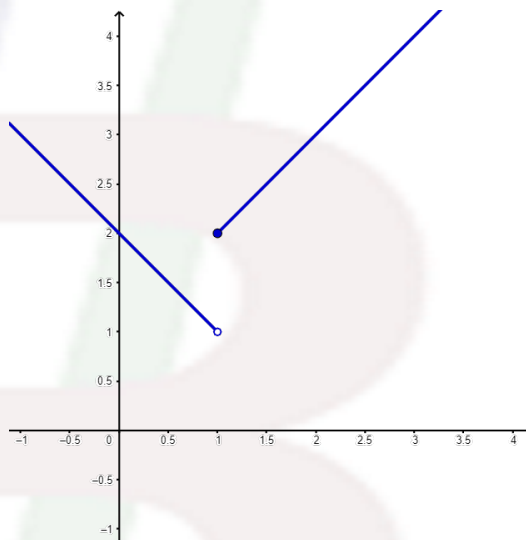
jest prawostronnie ciągła w punkcie $a = 1$, ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 = f(1),$$

ale nie jest lewostronnie ciągła, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq f(1).$$

Oznacza to, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $a = 1$.



📖 Kolejne przykłady na wykładzie!

Proste rozumowanie, twierdzenie o arytmetyce granic funkcji (por. tw. 15.20) oraz definicja ciągłości pozwalają udowodnić następujące fakty.

Twierdzenie 16.5. [Działania na funkcjach ciągłych]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje

$$\lambda \cdot f, \quad f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \text{ i } \quad \frac{f}{g}$$

są ciągłe w swoich dziedzinach (por. def. 4.12).

Wniosek 16.6. Funkcje wielomianowe, wymierne, wartość bezwzględna są funkcjami ciągłymi.

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

Twierdzenie 16.7. [Złożenie funkcji ciągłych]

Niech $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ i $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe w swoich dziedzinach.

Wtedy funkcja $f \circ g: \{x \in D_g: g(x) \in D_f\} \rightarrow \mathbb{R}$ jest też ciągła.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Przykład 16.8.

📖 Na wykładzie!

16.1 Rodzaje nieciągłości

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Punkt $a \in D_f$, w którym funkcja f nie jest ciągła, nazywamy *punktem nieciągłości* funkcji f .

Nieciągłość funkcji f w punkcie a może powstać z dwóch powodów:

- ❶ gdy nie istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ lub
- ❷ gdy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Definicja 16.9.

- a) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *nieciągłość pierwszego rodzaju*, jeżeli istnieją skończone granice jednostronne: lewostronna $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ i prawostronna $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, ale

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a).$$

- b) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *nieciągłość drugiego rodzaju*, jeżeli co najmniej jedna z granic jednostronnych

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Przykład 16.10.

📖 Na wykładzie!

Funkcje, które nie są określone w pojedynczych punktach $a \in \mathbb{R}$, można w pewnych przypadkach *rozszerzyć w sposób ciągły*.

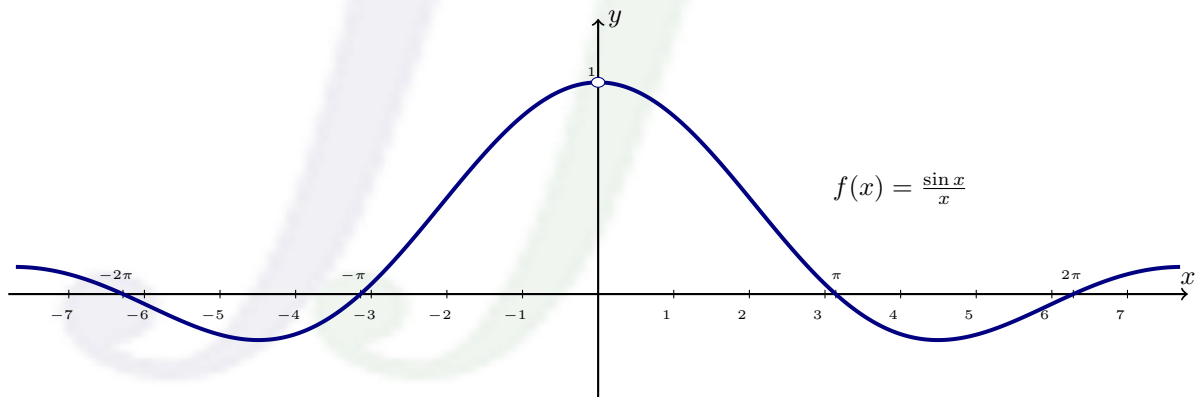
Uwaga 16.11. [Ciągłe rozszerzenie]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i $a \notin D_f$ będzie punktem skupienia zbioru D_f . Zakładamy, że granica $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ istnieje i jest równa g , a następnie definiujemy

$$\bar{f}: \begin{cases} D_f \cup \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \neq a \\ g & \text{dla } x = a. \end{cases} \end{cases}$$

Funkcja $\bar{f}$ jest ciągła na $D_f \cup \{a\}$.

Przykład 16.12. Niech $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



Zatem definiujemy teraz funkcję $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Funkcja $\bar{f}$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}$.

17 Najważniejsze własności funkcji ciągłych

Pierwszą, bardzo ważną własnością funkcji ciągłych jest ich ograniczoność na przedziałach domkniętych.

Twierdzenie 17.1. [Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b] \subseteq D_f$, $a < b$. Wtedy funkcja f jest na przedziale $[a, b]$ *ograniczona*, tzn. obraz $f([a, b]) = \{f(x): x \in [a, b]\}$ tego przedziału jest zbiorem ograniczonym:

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq M.$$

Dowód: 📖 na wykładzie!

W powyższym twierdzeniu założenie domkniętości przedziału jest istotne, bo np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na przedziale $(0, 1)$, ale nie jest na nim ograniczona. Także założenie ograniczoności przedziału jest istotne, ponieważ np. funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na przedziale $[0, +\infty)$, ale nie jest na nim ograniczona. Podobnie nie można opuścić założenia o ciągłości funkcji, gdyż np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

nie jest ograniczona na przedziale domkniętym $[0, 1]$.

Twierdzenie Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej można jeszcze doprecyzować, co pokażemy w twierdzeniu 17.3.

Przypomnijmy najpierw definicję ekstremów globalnych funkcji (por. Def. 4.28).

Definicja 17.2. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Wartość $f(a)$, gdzie $a \in D_f$, nazywamy

a) *globalnym (absolutnym) maksimum* funkcji f , jeżeli $f(a)$ jest największą wartością f w dziedzinie, tzn.

$$f(a) = \max \{f(x): x \in D_f\} \iff f(a) \geq f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in D_f.$$

b) *globalnym (absolutnym) minimum* funkcji f , jeżeli $f(a)$ jest najmniejszą wartością f w dziedzinie, tzn.

$$f(a) = \min \{f(x): x \in D_f\} \iff f(a) \leq f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in D_f.$$

Mówimy także, że funkcja f *przyjmuje w punkcie a swoje maksimum, odpowiednio minimum globalne*. Maksima i minima globalne funkcji nazywamy zbiorczo *ekstremami globalnymi* tej funkcji.

Twierdzenie 17.3. [Weierstrassa o osiągnięciu kresów]

Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b] \subseteq D_f$, $a < b$. Wtedy funkcja f przyjmuje na $[a, b]$ swoje ekstrema globalne, tzn.:

Istnieją punkty $x_m, x_M \in [a, b]$ takie, że

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Uwaga

- Punkty $x_m, x_M \in [a, b]$, w których funkcja przyjmuje swoje ekstrema globalne, nie są jednoznacznie wyznaczone. Twierdzenie 17.3 zapewnia nam jedynie istnienie przynajmniej jednej takiej pary. Przykładowo funkcja cosinus w przedziale $[-n\pi, n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, przyjmuje swoje minimum w punktach $x_m^j := (2j+1)\pi$ a maksimum w punktach $x_M^j := 2j\pi$.
- Twierdzenie 17.3 nie jest prawdziwe dla przedziałów, które nie są domknięte. Proszę rozważyć np. funkcję $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $x \mapsto \frac{1}{x}$.



Omówimy teraz następne własności funkcji ciągłych. Rozpocznijmy od sprecyzowania własności, która została wymieniona w uwadze po definicji 16.3.

Lemat 17.4. Niech funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła oraz niech $a \in D_f$ będzie takim punktem, że $f(a) > 0$. Wtedy istnieje takie otoczenie $\mathcal{O}_\delta(a)$ punktu a , że $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathcal{O}_\delta(a)$.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Analogicznie można pokazać, że $f(x) < 0$ w pewnym otoczeniu punktu a , o ile $f(a) < 0$. Podsumowując: jeśli $f(a) \neq 0$, to istnieje takie otoczenie punktu a , w którym $f(x) \neq 0$.

Wnioskiem z lematu 17.4 jest kolejne twierdzenie, zwane własnością Darboux dla funkcji ciągłych. Na tej własności opiera się, stosowana w metodach numerycznych, metoda bisekcji poszukiwania miejsc zerowych funkcji.

Twierdzenie 17.5. [Darboux]

Niech funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na przedziale $[a, b] \subset D_f$, $a < b$, oraz niech $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tzn. albo $f(a) < 0 < f(b)$ albo $f(a) > 0 > f(b)$).

Wtedy funkcja f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale (a, b) , tzn.: istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Uwaga Twierdzenie 17.5 nie jest prawdziwe dla funkcji nieciągłych.

Przykładowo rozważmy funkcję $f(x) := h(x) - \frac{1}{2}$, $x \in [-1, 1]$, gdzie h jest funkcją Heavyside'a. Wtedy warunek $f(-1) \cdot f(1) < 0$ jest wprawdzie spełniony, ale funkcja f nie ma miejsc zerowych w przedziale $(-1, 1)$.

Wniosek 17.6.

- Funkcje wielomianowe $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nieparzystego stopnia

$$p(x) = \sum_{n=0}^{2N+1} a_n x^n, \quad \text{gdzie } N \in \mathbb{N} \text{ i } a_{2N+1} \neq 0$$

(np. $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$) mają przynajmniej jedno miejsce zerowe.

- Czy równanie

$$x = 2 \sin x \quad \text{dla } x > 0$$

ma rozwiązanie?

Szukając odpowiedzi na to pytanie rozpoczynamy od zdefiniowania funkcji

$$f(x) := x - 2 \sin x, \quad x > 0.$$

Funkcja f jest ciągła oraz spełnia warunek: $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2 < 0$ i $f(\pi) = \pi > 0$. Z własności Darboux wynika, że funkcja f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ostatecznie równanie $x = 2 \sin x$ ma w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ przynajmniej jedno rozwiązanie.

Twierdzenie 17.5 możemy uogólnić i w ten sposób sprecyzować najbardziej intuicyjną własność funkcji ciągłych, czyli możliwość narysowania wykresu takiej funkcji jednym pociągnięciem kredy na tablicy.

Twierdzenie 17.7. [Bolzano-Cauchy'ego]

Niech funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła na przedziale $[a, b] \subseteq D_f$, $a < b$ oraz niech x_m i x_M będą punktami, w których f przyjmuje swoje minimum i odpowiednio maksimum na $[a, b]$.

Wtedy funkcja f przyjmuje przynajmniej raz każdą wartość z przedziału $[f(x_m), f(x_M)]$, tzn.: dla każdego $y \in [f(x_m), f(x_M)]$ istnieje takie $x \in [a, b]$, że $f(x) = y$.

Dowód: 📖 na wykładzie!



Uwaga

- Graficznie twierdzenie to oznacza, że prosta o równaniu $y = w$, gdzie $w \in [f(x_m), f(x_M)]$, przecina wykres funkcji przynajmniej raz.
- Jeżeli w twierdzeniu założymy, że funkcja f jest (ściśle) monotoniczna, to punkt x będzie wyznaczony jednoznacznie.
- Z tego twierdzenie wynika, że zbiorem wartości funkcji ciągłej na przedziale jest także przedział, a mianowicie $W_f = [f(x_m), f(x_M)]$.
- Ciągłość jest jedynie warunkiem wystarczającym zachodzenia powyższego twierdzenia. Rozważmy przykładowo funkcję

$$f: \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{cases}$$

Jest ona ciągła jedynie w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$, ale przyjmuje każdą wartość z przedziału pomiędzy swoim minimum $f(0) = 0$ i maksimum $f(1) = 1$.

18 Jednostajna ciągłość

W tym rozdziale wprowadzimy nowe, dużo mocniejsze niż ciągłość, pojęcie. Rozpocznijmy od przypomnienia definicji ciągłości. Mówimy, że funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na zbiorze $M \subseteq D_f$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, czyli

$$\forall x_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad (|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Łatwo zauważyć, że w powyższej definicji liczba $\delta_\varepsilon > 0$ zależy nie tylko od zadanego $\varepsilon > 0$, ale także od punktu x_0 , w którym ciągłość badamy, czyli $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x_0)$. Przekształcając kwantyfikatory uwalniamy się od zależności od punktu x_0 i otrzymujemy następującą definicję.

Definicja 18.1. Mówimy, że funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest *jednostajnie ciągła* na zbiorze $M \subseteq D_f$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta_\varepsilon > 0$, że

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

dla dowolnych $x, y \in M$ spełniających warunek $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

Krótko:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in M \quad (|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Wprost z definicji mamy następujące twierdzenie.

Wniosek 18.2. Niech $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą na zbiorze $M \subseteq D_f$. Wtedy funkcja f jest także ciągła na M .

Twierdzenie odwrotne jest na ogół fałszywe.

Rozważmy teraz kilka przykładów.

Przykład 18.3. 📖 Na wykładzie!

Przy dodatkowym założeniu domkniętości rozważanego zbioru $M \subseteq D_f$ zachodzi twierdzenie odwrotne do wniosku 18.2.

Twierdzenie 18.4. [Cantora o ciągłości jednostajnej]

Funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła na przedziale domkniętym $[a, b] \subseteq D_f$ jest na nim jednostajnie ciągła.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Wniosek 18.5. Jeśli $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą posiadającą skończoną granicę w $+\infty$, to f jest funkcją jednostajnie ciągłą.

Analogicznie dowodzimy następujących własności:

- Jeśli $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą posiadającą skończoną granicę w $-\infty$, to f jest funkcją jednostajnie ciągłą.
- Jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą posiadającą skończoną granicę w $-\infty$ i w $+\infty$, to f jest funkcją jednostajnie ciągłą.

18.1 Warunek Lipschitza

Definicja 18.6. Mówimy, że funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia *warunek Lipschitza* na zbiorze $M \subseteq D_f$, jeśli istnieje stała $L \in \mathbb{R}$ taka, że

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

dla dowolnych $x, y \in M$.

Wniosek 18.7. Jeśli funkcja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na zbiorze $M \subseteq D_f$, to f jest na nim jednostajnie ciągłą.

Dowód: 📖 na wykładzie!

Przykład 18.8. 📖 Na wykładzie!

Możemy rozważać także bardziej ogólną klasę funkcji spełniających *warunek Höldera* z wykładnikiem $0 < \alpha \leq 1$, czyli funkcji, dla których istnieje stała $H \in \mathbb{R}$ taka, że

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^\alpha$$

dla dowolnych $x, y \in M$.

Funkcje spełniające warunek Lipschitza są zatem funkcjami spełniającymi warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1$. Łatwo też pokazać, że funkcje spełniające warunek Höldera są ciągłe, a nawet jednostajnie ciągłe.

19 Funkcje monotoniczne

Zauważmy, że funkcje monotoniczne zachowują się w pewnym sensie „porządnie”. Mianowicie, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19.1. Funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ może mieć co najwyżej nieciągłości pierwszego rodzaju.

Można także pokazać, że zbiór punktów nieciągłości takiej funkcji może być co najwyżej przeliczalny.

W rozważaniach przed uwagą 4.18 wspomnieliśmy, że każda silnie monotoniczna funkcja jest różnowartościowa, ale funkcja różnowartościowa niekoniecznie musi być monotoniczna. Z twierdzenia 17.7 Bolzano-Cauchy’ego wynika natomiast następująca ważna własność funkcji ciągłych.

Twierdzenie 19.2. Funkcja różnowartościowa i ciągła na przedziale $[a, b]$ jest na tym przedziale silnie monotoniczna.

Zajmiemy się teraz ciągłością funkcji odwrotnej do funkcji ciągłej. Korzystając z intuicyjnej definicji ciągłości (nieodrywanie długopisu od kartki) i faktu, że wykres funkcji odwrotnej do f (o ile taka istnieje, czyli w przypadku, gdy f jest różnowartościowa) jest odbiciem symetrycznym wykresu funkcji f względem prostej $y = x$, wydaje się oczywiste, że funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie 19.3. [o ciągłości funkcji odwrotnej]

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą i silnie monotoniczną funkcją. Wtedy jej funkcja odwrotna f^{-1} jest także ciągłą i silnie monotoniczną na przedziale $f([a, b])$.

Uzasadnienie: 📖 na wykładzie!

Założenie uczynione w powyższym twierdzeniu, że funkcja f jest rozważana na przedziale, jest istotne i nie może być pominięte. Rozważmy przykładowo funkcję

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1], \\ x-1 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

silnie rosnącą i ciągłą w każdym z przedziałów $[0, 1]$ i $(2, 3]$. Natomiast funkcja odwrotna

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

określona na przedziale $[0, 2]$ nie jest ciągła w punkcie $x = 1$, ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x).$$

Nieciągłość funkcji odwrotnej f^{-1} wynika z faktu, że funkcja f jest rozważana na sumie przedziałów $[0, 1] \cup (2, 3]$.

Przykład 19.4. Wspomniane wcześniej twierdzenie 3.9 o istnieniu pierwiastka z dowolnej liczby dodatniej możemy teraz udowodnić i rozszerzyć korzystając z twierdzenia 17.7 Bolzano-Cauchy'ego.

Funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

jest ciągła i silnie rosnąca na przedziale $[0, \infty)$. Zbiorem wartości jest też przedział $[0, \infty)$, ponieważ $f(0) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Niech teraz y_0 będzie dowolną liczbą dodatnią. Z ciągłości funkcji f w punkcie $x = 0$ i z warunku $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ wynika, że istnieją liczby dodatnie a i b , takie że

$$0 < f(x) < y_0 \quad \text{dla } 0 < x < a \quad \text{oraz} \quad f(x) > y_0 \quad \text{dla } x > b.$$

Zatem

$$f\left(\frac{a}{2}\right) < y_0 < f(2b)$$

i zgodnie z twierdzeniem 17.7 w przedziale $(\frac{a}{2}, 2b)$ istnieje punkt x_0 , taki że

$$f(x_0) = x_0^n = y_0,$$

a to oznacza, że

$$x_0 = \sqrt[n]{y_0}.$$

Funkcja potęgowa f jest ciągła w przedziale domkniętym $[0, 2b]$, zatem z twierdzenia 19.3 wynika w szczególności, że funkcja odwrotna jest ciągła w punkcie y_0 i prawostronnie ciągła w punkcie $y = 0$.

Pokazaliśmy zatem, że funkcja potęgowa o wykładniku naturalnym ma ciągłą i silnie rosnącą funkcję odwrotną określoną na przedziale $[0, \infty)$, którą nazywamy n -tym pierwiastkiem i oznaczamy $\sqrt[n]{x}$ lub $x^{\frac{1}{n}}$.

19.1 Funkcja wykładnicza

W przykładzie 14.3 zaprezentowaliśmy pewien szereg

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

i korzystając z kryterium d'Alemberta pokazaliśmy, że szereg ten jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Szereg ten definiuje *funkcję wykładniczą (eksponencjalną)*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Przedstawiliśmy także pewne własności tej funkcji i wzory jej dotyczące. Podsumujmy je teraz (i dodajmy nowe):

Twierdzenie 19.5. *Funkcja eksponencjalna* zdefiniowana wzorem

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{cases}$$

jest ciągła, (silnie) rosnąca i spełnia następujące warunki:

- $\exp(0) = 1$,
- $\exp(1) = e$,
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
w szczególności: $\exp(x) > 1$ dla $x > 0$ i $0 < \exp(x) < 1$ dla $x < 0$,
- $\exp(n) = e^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz ponadto $\exp(r) = e^r$ dla wszystkich $r \in \mathbb{Q}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot \exp(-x) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Uzasadnienie:  na wykładzie!

Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ istnieje taki ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Ponieważ funkcja eksponencjalna jest ciągła, zatem

$$\exp(x) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n}.$$

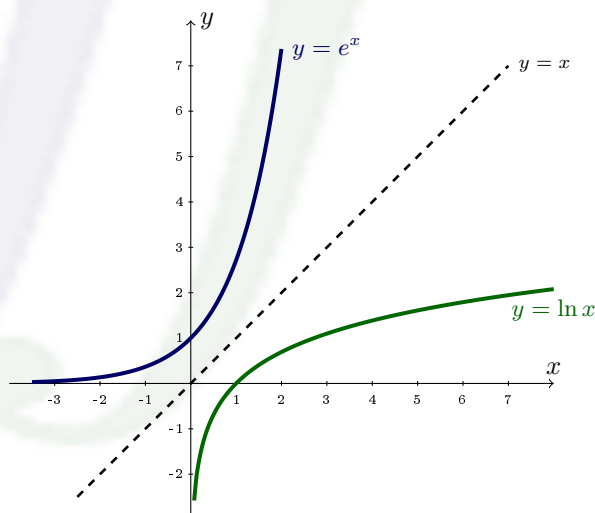
Z tego powodu (por. wniosek 8.32) $\exp(x)$ oznaczamy symbolem e^x także dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

19.2 Funkcja logarytmiczna

Funkcja eksponencjalna $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, silnie rosnąca i odwzorowuje oś rzeczywistą $\mathbb{R}$ bijektywnie na półoś $(0, \infty)$, tzn. $W_{\exp} = (0, \infty)$. Zgodnie z twierdzeniem 19.3 ma zatem ciągłą i silnie rosnącą funkcję odwrotną.

Definicja 19.6. Funkcję odwrotną funkcji eksponencjalnej nazywamy *funkcją logarytmiczną (logarytmem naturalnym)*:

$$\ln: \begin{cases} (0, \infty) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x. \end{cases}$$



Funkcja logarytmiczna ma następujące

Własności 19.7.

- $\ln(\exp(x)) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(\ln(x)) = x$ dla wszystkich $x \in (0, \infty)$,
- $\ln 1 = 0$,
- $\ln e = 1$,
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ dla wszystkich $x, y \in (0, \infty)$,
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ dla wszystkich $x \in (0, \infty)$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$.

Uzasadnienie:  na wykładzie!

19.3 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna o dowolnej podstawie

Rozpatrywane powyżej funkcja wykładnicza i logarytmiczna związane były z liczbą e , którą nazywaliśmy *podstawą naturalną*, tak zwaną *podstawą naturalną*. Bardzo łatwo można przejść od podstawy naturalnej e do innej dowolnej liczby $a > 0$. Korzystamy przy tym z jednej z własności wymienionych w poprzednim twierdzeniu:

$$\exp(\ln(a)) = e^{\ln(a)} = a \quad \text{dla każdej liczby } a > 0.$$

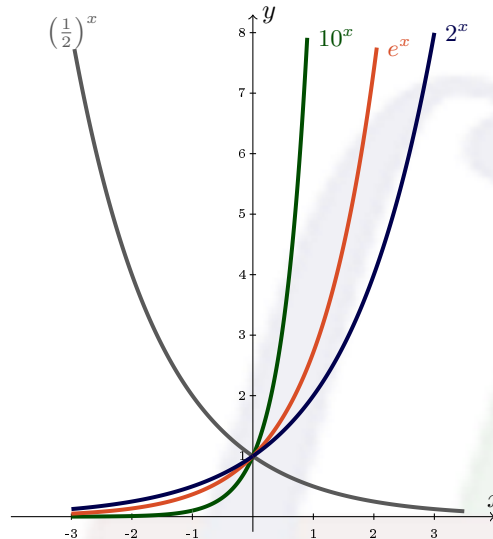
Funkcją wykładniczą $y = a^x$ o podstawie $a > 0$ nazywamy funkcję daną wzorem

$$a^x := e^{x \cdot \ln(a)} = \exp(x \cdot \ln a) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wobec tego funkcja wykładnicza o dowolnej podstawie jest ciągła w swojej dziedzinie zgodnie z twierdzeniem 16.7 jako złożenie funkcji ciągłych: liniowej i eksponencjalnej.

Z powyższej definicji wynika ponadto, że funkcja wykładnicza ma następujące własności

- $a^0 = e^{0 \cdot \ln(a)} = 1$,
- $a^1 = e^{1 \cdot \ln a} = a$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $b > 0$,
- $a^{-x} = e^{-x \cdot \ln a} = \frac{1}{e^{x \cdot \ln a}} = \frac{1}{a^x}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $\left(\frac{1}{a}\right)^x = e^{x \cdot \ln \frac{1}{a}} = e^{x \cdot (-\ln a)} = a^{-x}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- $a^x > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

**Uwaga**

- Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $1^x = 1$, zatem dla $a = 1$ funkcja wykładnicza nie jest bijekcją. Z tego powodu często w ogóle nie rozważa się funkcji wykładniczej o takiej podstawie.
- Monotoniczność funkcji $y = a^x$, a także jej zbieżność w nieskończonościach zależy od tego, czy $a < 1$ lub $a > 1$.
- Dla liczby naturalnych $n \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy a^n na dwa sposoby:

$$a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-razy}} \quad \text{lub} \quad a^n := \exp(n \cdot \ln a).$$

Definicje te są zgodne. Można to pokazać tak samo, jak w przypadku $a = e$.

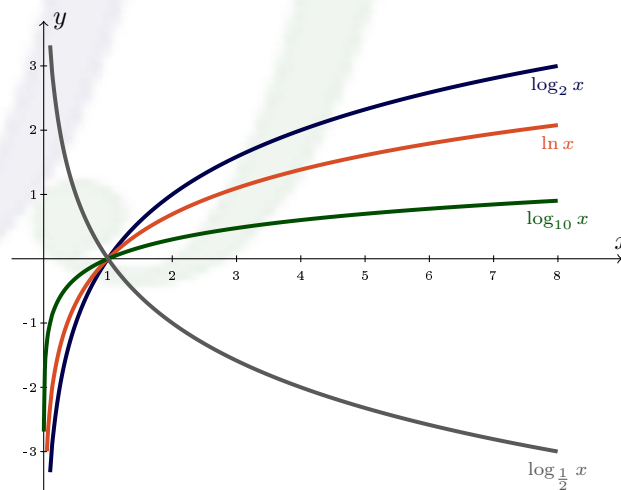
Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ o podstawie $a > 0$ i $a \neq 1$ zdefiniowana jest wzorem

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{dla} \quad x \in (0, \infty).$$

Wynika stąd, że

$$a^{\log_a x} = \exp(\log_a x \cdot \ln a) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln a\right) = \exp(\ln x) = x.$$

Funkcja $y = \log_a x$ jest zatem funkcją odwrotną funkcji wykładniczej $y = a^x$ i jako taka jest ciągła w swojej dziedzinie. Ciągłość możemy także uzasadnić korzystając z twierdzenia 16.7 o ciągłości superpozycji funkcji ciągłych: logarytmu naturalnego i funkcji liniowej.



19.4 Funkcja potęgowa

Funkcję potęgową $y = x^\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, określoną w przedziale $(0, \infty)$ możemy teraz zdefiniować wzorem

$$x^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln(x)} = \exp(\alpha \cdot \ln x).$$

Wobec tego funkcja potęgowa jest ciągła w swojej dziedzinie zgodnie z twierdzeniem 16.7 jako złożenie funkcji ciągłych: logarytmicznej, liniowej i wykładniczej.

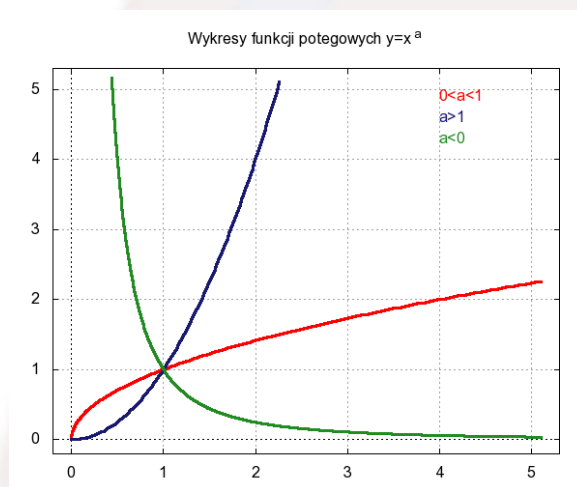
Korzystając z własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej otrzymujemy, że funkcja potęgowa określona w przedziale $(0, \infty)$ jest silnie rosnąca dla $\alpha > 0$ oraz silnie malejąca dla $\alpha < 0$. Ponadto

- dla $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty,$$

- dla $\alpha < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0.$$



19.5 Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

Również funkcje trygonometryczne mogą zostać zdefiniowane za pomocą szeregów.

Definicja 19.8. Dla $x \in \mathbb{R}$ kładziemy

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

i nazywamy odpowiednio *sinusem* x oraz *cosinusem* x .

Funkcje $\sin: x \mapsto \sin x$ oraz $\cos: x \mapsto \cos x$ nazywamy odpowiednio *funkcją sinus* i *funkcją cosinus*.

Definicja jest poprawna, ponieważ dla $x = 0$ zbieżność bezwzględna szeregów jest oczywista, a dla $x \neq 0$ można ją wykazać korzystając z kryterium d'Alemberta.

Z twierdzenia Mertensa, iloczynu Cauchy'ego i powyższej definicji można udowodnić następujące twierdzenie, w którym zawarte są znane ze szkoły średniej wzory.

Twierdzenie 19.9. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

- $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$
- $\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Wniosek 19.10. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

- a) $-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1,$
- b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$
- c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$
- d) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}.$

Bezpośrednio z definicji i prawa łączności dla szeregów można wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19.11. Dla $x \in (0, 1]$ zachodzą następujące nierówności:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{oraz} \quad x \cos x < \sin x.$$

Wniosek 19.12. Prawdziwe są następujące zależności

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0,$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0,$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

czyli w szczególności funkcje sinus i cosinus są ciągłe.

Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus możemy wykazać, że

$$0 < \cos x \quad \text{i} \quad 0 < \sin x$$

dla $x \in (0, 1]$. Zatem funkcje sinus i cosinus nie znikają tożsamościowo i następująca definicja jest poprawna.

Definicja 19.13. Niech $x \in \mathbb{R}$.

- a) Liczbę $\frac{\sin x}{\cos x}$, gdy $\cos x \neq 0$ nazywamy *tangensem x* i oznaczamy $\operatorname{tg} x$.
Funkcję

$$\operatorname{tg}: \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{tg}(x). \end{cases}$$

nazywamy *funkcją tangens*.

- b) Liczbę $\frac{\cos x}{\sin x}$, gdy $\sin x \neq 0$ nazywamy *cotangensem x* i oznaczamy $\operatorname{ctg} x$.
Funkcję

$$\operatorname{ctg}: \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: \sin x \neq 0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{ctg}(x). \end{cases}$$

nazywamy *funkcją cotangens*.

Łatwo uzasadnić, że funkcje tangens i cotangens są ciągłe w swoich dziedzinach.

Przy powyższej definicji prawdziwe są także znane ze szkoły wzory redukcyjne. Jednak aby je wykazać musimy najpierw wprowadzić liczbę π .

Funkcja cosinus jest ciągła, zatem korzystając z własności Darboux możemy udowodnić następujący lemat.

Lemat 19.14. Istnieje $x_0 \in (1, 2)$ takie, że $\cos x_0 = 0$ oraz $\cos x > 0$ dla $x \in [0, x_0)$.

Wynika stąd, że prawdziwa jest poniższa definicja.

Definicja 19.15. [Liczby π]

Symbolem π oznaczamy liczbę dodatnią spełniającą warunki:

- $\cos x \neq 0$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$,
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Następnie wykazujemy prawdziwość poniższego lematu.

Lemat 19.16. Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mamy $\cos x > 0$ oraz $\sin x > 0$, ponadto $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Teraz już łatwo wykazać prawdziwość wzorów redukcyjnych.

Twierdzenie 19.17. [Wzory redukcyjne]

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące wzory:

- a) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x;$
- b) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x;$
- c) $\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x;$
- d) $\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x,$
- e) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$

Ze wzorów redukcyjnych i poprzedniego lematu dostajemy następujące zależności.

Wniosek 19.18. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas:

- a) Dla każdego $x \in (2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ mamy $\cos x > 0$ i $\sin x > 0$,
- b) Dla każdego $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ mamy $\cos x < 0$ i $\sin x > 0$,
- c) Dla każdego $x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ mamy $\cos x < 0$ i $\sin x < 0$,
- d) Dla każdego $x \in (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ mamy $\cos x > 0$ i $\sin x < 0$.

Wniosek 19.19. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy:

- a) $\cos x = \cos y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $k \in \mathbb{Z}$, że $x - y = 2k\pi$ lub $x + y = 2k\pi$.
- b) $\sin x = \sin y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $k \in \mathbb{Z}$, że $x - y = 2k\pi$ lub $x + y = \pi + 2k\pi$.

I w ten sposób kolejno można udowodnić wszystkie znane ze szkoły wzory trygonometryczne, także te dla funkcji tangens i cotangens.

19.5.1 Funkcje cyklometryczne

Z twierdzenia 19.3 wynika także ciągłość funkcji cyklometrycznych zdefiniowanych w rozdziale 5.4.1, możemy zatem uzupełnić przedstawiony tam lemat.

Twierdzenie 19.20.

- a) Funkcja sinus jest ciągła i silnie rosnąca na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oraz $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.
Funkcja $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ jest zatem odwracalna.
Funkcja odwrotna

$$\text{arcsin}: \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \text{arcsin}(x) \end{cases}$$

jest zatem też silnie rosnąca i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

- b) Funkcja cosinus jest ciągła i silnie malejąca na przedziale $[0, \pi]$ oraz $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.
 Funkcja $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ jest zatem odwracalna.
 Funkcja odwrotna

$$\arccos: \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arccos(x) \end{cases}$$

jest zatem też silnie malejąca i ciągła w przedziale $[-1, 1]$.

- c) Funkcja tangens jest ciągła i silnie rosnąca na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $\operatorname{tg}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$.
 Funkcja $\operatorname{tg}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest zatem odwracalna.
 Funkcja odwrotna

$$\operatorname{arctg}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arctg}(x) \end{cases}$$

jest zatem też silnie rosnąca i ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

- d) Funkcja cotangens jest ciągła i silnie malejąca na przedziale $(0, \pi)$ oraz $\operatorname{ctg}((0, \pi)) = \mathbb{R}$.
 Funkcja $\operatorname{ctg}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ jest zatem odwracalna.
 Funkcja odwrotna

$$\operatorname{arccotg}: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arccotg}(x) \end{cases}$$

jest zatem też silnie malejąca i ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

Uwaga Funkcje potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne oraz cyklometryczne nazywamy *podstawowymi funkcjami elementarnymi*. *Funkcją elementarną* nazywamy każdą funkcję rzeczywistą, która otrzymujemy z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i złożenia zastosowanych skończoną liczbę razy.

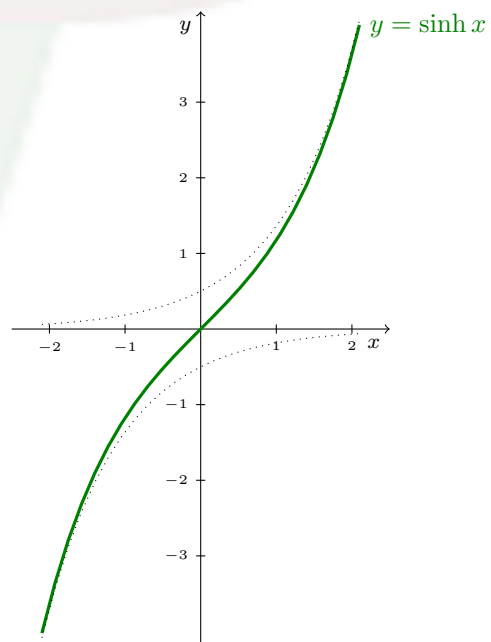
19.6 Funkcje hiperboliczne

Z pomocą funkcji eksponencjalnej można zdefiniować kolejne funkcje standardowe, których nazwy przypominają nazwy funkcji trygonometrycznych. I nie jest to przypadek. Są to tzw. *funkcje hiperboliczne*: cosinus hiperboliczny, sinus hiperboliczny, tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny.

Definicja 19.21.

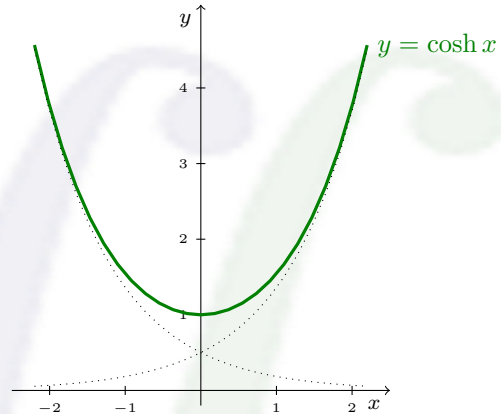
- a) *Sinusem hiperbolicznym* nazywamy funkcję

$$\sinh x: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \end{cases}$$



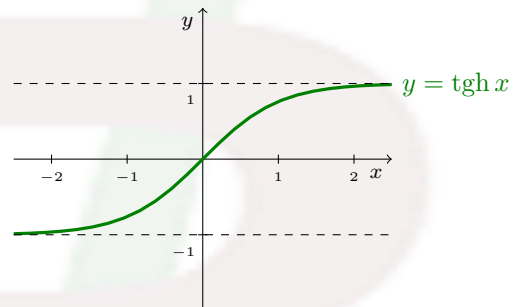
b) *Cosinusem hiperbolicznym* nazywamy funkcję

$$\cosh x: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \end{cases}$$



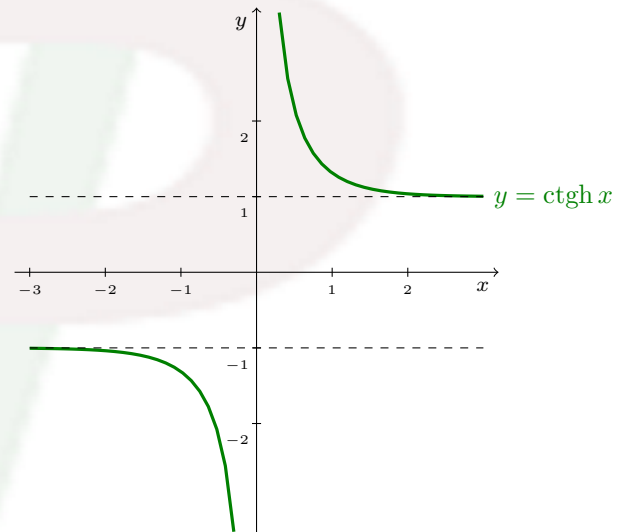
c) *Tangensem hiperbolicznym* nazywamy funkcję

$$\operatorname{tgh} x: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{cases}$$



d) *Cotangensem hiperbolicznym* nazywamy funkcję

$$\operatorname{ctgh} x: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{cases}$$



Funkcje hiperboliczne są ciągłe, co wynika z ciągłości funkcji eksponencjalnej. Łatwo zauważyć także, że cosinus hiperboliczny jest funkcją parzystą, natomiast pozostałe funkcje hiperboliczne są funkcjami nieparzystymi. Ponadto, ponieważ $\sinh x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$, zatem dziedziną cotangensa hiperbolicznego jest $D_{\operatorname{ctgh}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bez problemu można także wyznaczyć zbiory wartości poszczególnych funkcji hiperbolicznych:

$$W_{\cosh} = [1, +\infty), \quad W_{\sinh} = \mathbb{R}, \quad W_{\operatorname{tgh}} = (-1, 1), \quad W_{\operatorname{ctgh}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Umiemy już także wyznaczyć asymptoty wykresów tych funkcji (o ile istnieją). Wprost z definicji funkcji hiperbolicznych i funkcji eksponencjalnej wynika, że

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ i } \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szeregi są bezwzględnie zbieżne dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Podobnie, jak w przypadku funkcji trygonometrycznych możemy wykazać najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19.22. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

- a) $\cosh 0 = 1, \quad \sinh 0 = 0,$
- b) $\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x,$
- c) $\cosh x \geq 1, \quad \sinh x > 0 \iff x > 0,$
- d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \quad \cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$
- e) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad \sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$
- f) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

Ostatnią tożsamość, z powodu podobieństwa do znanej tożsamości trygonometrycznej, będziemy nazywać *je-dynką hiperboliczną*. Wynika z niej, że zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych postaci $(\cosh t, \sinh t)$, gdzie t jest parametrem, wyznacza hiperbolę, podobnie jak zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych postaci $(\cos t, \sin t)$ wyznacza okrąg.

Wniosek 19.23. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\begin{aligned}\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x, \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x.\end{aligned}$$

Proszę porównać te wzory z analogicznymi wzorami dla funkcji trygonometrycznych.

Wniosek 19.24.

- Sinus hiperboliczny jest funkcją silnie rosnącą.
- Cosinus hiperboliczny jest funkcją silnie rosnącą dla $x > 0$ i silnie malejącą dla $x < 0$.

Funkcja sinus hiperboliczny $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zatem bijekcją, a więc jest odwracalna. Podobnie bijekcją jest zacieśnienie cosinusa hiperbolicznego do przedziału $[0, \infty)$ na przedział $[1, +\infty)$.

Definicja 19.25.

- a) Funkcję odwrotną do funkcji sinus hiperboliczny nazywamy *area sinusem hiperbolicznym* i oznaczamy

$$\operatorname{arsinh} x: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \operatorname{arsinh} x. \end{cases}$$

- b) Funkcję odwrotną do funkcji cosinus hiperboliczny nazywamy *area cosinusem hiperbolicznym* i oznaczamy

$$\operatorname{arcosh} x: \begin{cases} [1, +\infty) & \longrightarrow [0, +\infty) \\ x & \longmapsto \operatorname{arcosh} x. \end{cases}$$

Podobnie definiujemy funkcje odwrotne do tangensa i cotangensa hiperbolicznego.

Twierdzenie 19.26. Funkcje area dane są następującymi wzorami:

- a) $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ dla $x \in \mathbb{R}$,
- b) $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ dla $x \in [1, \infty)$.

Area cosinus hiperboliczny, jako funkcja odwrotna do funkcji parzystej, jest niejednoznaczny. Funkcja ma dwie gałęzie, obie określone na przedziale $[1, +\infty)$. Ogólnie dla liczb rzeczywistych:

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

Powodzenia Na Egzaminie!