mechanika

Mechanika analityczna w zadaniach

Elżbieta Augustyn

Kraków 2023

Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

mechanika

Mechanika analityczna w zadaniach

Elżbieta Augustyn

Kraków 2023

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCA KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH
Agata Zachariasz

REDAKTOR SERII – MECHANIKA
Artur Ganczarski

RECENZENCI
Adam Brański
Roman Starosta

KOORDYNATORZY PROJEKTU
Małgorzata Kowalczyk
Otmar Vogt

REDAKTOR WYDAWNICZY
Agnieszka Filosek

KOREKTA
Dorota Sapek

SKŁAD I ŁAMANIE
Adam Bania

PROJEKT OKŁADKI
Karolina Szafran

Tekst został opublikowany w ramach projektu „Programowanie doskonałości – PK XXI 2.0. Program rozwoju Politechniki Krakowskiej na lata 2018-22".
Dofinansowanie z Europejskiego Funduszu Społecznego: 18,048,774.96 PLN

Edycja online
eISBN 978-83-67188-75-3

13 ark. wyd.

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; 12 628 37 25, fax 12 628 37 60
wydawnictwo@pk.edu.pl
www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres korespondencyjny: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE

W mechanice klasycznej możemy wyróżnić trzy równoważne sformułowania: Newtona, Lagrange'a i Hamiltona. Mechanika klasyczna oparta na podejściu Newtona jest stosunkowo łatwa w zapisie, ale często otrzymuje się układ równań z wieloma niewiadomymi. Mechanika oparta na podejściu Lagrange'a oraz Hamiltona nosi nazwę mechaniki analitycznej. Należy pamiętać, że mechanika analityczna nie jest zaprzeczeniem mechaniki newtonowskiej, lecz jej innym sposobem zapisu. Bazuje ona na metodach rachunku wariacyjnego. W podejściu Lagrange'a nie uwzględnia się reakcji więzów, więc otrzymuje się mniejszą liczbę niewiadomych, co upraszcza zagadnienie. Do opisu zagadnienia stosuje się zamiast współrzędnych kartezjańskich, jak to było w mechanice newtonowskiej, współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione. Formalizm Lagrange'a oparty jest na funkcji Lagrange'a, którą nazywamy potencjałem kinetycznym i jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej. Podejście Hamiltona, które powstało prawie pół wieku później, nad którym również pracował Lagrange'a, jest jeszcze bardziej elastyczne, gdyż daje dużą swobodę przy wyborze współrzędnych. Formalizm Hamiltona z kolei oparty jest na funkcji Hamiltona, która w większości przypadków jest niczym innym jak całkowitą energią układu.

Niniejszy podręcznik przeznaczony jest dla studentów kierunków technicznych, którzy planują studia z przedmiotu mechanika analityczna. Z mojego doświadczenia wynika, że studenci mają bardzo duży problem z rozwiązywaniem zadań z mechaniki analitycznej ze względu na zaawansowane metody analizy matematycznej. Celem tego podręcznika jest pokazanie sposobu rozwiązywania zagadnień mechaniki analitycznej, dlatego rozwiązania zadań są bardzo dokładnie rozpisane, linijka po linijce pokazane przejścia matematyczne.

Podręcznik składa się z siedmiu rozdziałów i skonstruowany jest w ten sposób, że każde zagadnienie zawiera najpierw wstęp teoretyczny, a następnie około 10 zadań z dokładnym rozpisaniem i wytłumaczeniem problemu. Na końcu rozdziału znajduje się zestaw zadań do samodzielnego rozwiązania. W ten sposób student może samodzielnie pracować a następnie sprawdzić rozwiązania tych zadań z odpowiedziami znajdującymi się w VII rozdziale.

Pisząc ten podręcznik, inspirowałam się zadaniami zawartymi w literaturze [5, 7–10, 13, 16, 18, 21]. Każde z nich jest moim własnym opracowaniem. Wstęp teoretyczny jest wynikiem moich przemyśleń opracowanych na podstawie literatury [1–4, 6, 11, 12, 14–17, 19, 20].

Chciałam podziękować prof. dr. hab. inż. Markowi Stanisławowi Kozieniowi oraz dr. inż. Danielowi Ziemiańskiemu za cenne wskazówki przy pisaniu tego podręcznika. Dziękuję również prof. dr. hab. inż. Arturowi Ganczarskiemu za cenne uwagi redakcyjne.

Podziękowania składam Panom Recenzentom, prof. dr. hab. inż. Adamowi Brańskiemu oraz dr. hab. inż. Romanowi Staroście, za otrzymane rady i sugestie.

I. WIĘZY I ICH KLASYFIKACJA

1.1. WIĘZY I KLASYFIKACJA WIĘZÓW

Rozważmy układ punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ poddanych pewnym ograniczeniom ruchu, czyli układ nieswobodny. Współrzędne prostokątne tych punktów są wówczas zależne od siebie i muszą spełniać określoną liczbę równań, które noszą nazwę **więzów**, w postaci:

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0,\ v = 1, 2, \ldots, k \tag{1.1}$$

Liczba współrzędnych prostokątnych punktów materialnych jest równa $3n$, z czego dowolnych współrzędnych jest $3n - k$ i spełniają one k równań postaci (1.1).

Więzy możemy podzielić ze względu na:

- ograniczenia dotyczące ruchu ciała (kinematyczne) lub położenia (geometryczne),
- ograniczenia dotyczące swobody ciała materialnego (jednostronne lub dwustronne),
- występowanie czasu (skleronomiczne (stacjonarne) lub reonomiczne (niestacjonarne)),
- występowanie tarcia (idealne lub nieidealne (rzeczywiste)),
- zależność od prędkości (holonomiczne lub nieholonomiczne).

Jeżeli w równaniach więzów występują tylko współrzędne punktów materialnych i nie występuje w nich bezpośrednio czas, to tego typu więzy nazywamy **więzami skleronomicznymi (stacjonarnymi)** lub **więzami niezależnymi od czasu**.

Jeżeli w równaniach więzów oprócz współrzędnych punktów występuje bezpośrednio czas, czyli:

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,\ v = 1, 2, \ldots, k \tag{1.2}$$

to więzy tego typu nazywamy **więzami reonomicznymi (niestacjonarnymi)**.

Więzy geometryczne nakładają ograniczenia nie tylko na położenie, ale także na prędkości i przyspieszenia punktów układu:

$$f_\nu(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \nu = 1, 2, \ldots, k \tag{1.3}$$

Funkcje f_ν są funkcjami klasy C^2 określonymi w $3n + 1$ wymiarowej przestrzeni euklidesowej i mają ciągłe drugie pochodne cząstkowe względem swych argumentów.

Więzy kinematyczne (różniczkowe) dwustronne wyrażają się funkcjami klasy C^1 określonymi następująco:

$$f_\nu\left(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n\right) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k \tag{1.4}$$

Więzy kinematyczne nakładają również ograniczenia na przyspieszenia punktów. Więzy te możemy traktować jako równania różniczkowe I rzędu względem niewiadomych $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Czasem równanie różniczkowe da się scałkować, wówczas mówimy, że więzy kinematyczne są całkowalne. Jeżeli więzy kinematyczne da się przekształcić za pomocą pewnego mnożnika do pochodnej zupełnej względem czasu, to takie więzy są równoważne więzom geometrycznym.

Jeżeli w równaniach więzów występują współrzędne, za pomocą których określamy położenie rozważanego układu, ale nie występują pochodne tych współrzędnych po czasie, to więzy tego typu nazywamy **holonomicznymi**.

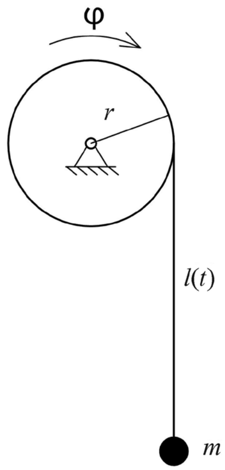
Jeżeli w równaniach więzów występują współrzędne, za pomocą których określamy położenie rozważanego układu oraz występują pochodne tych współrzędnych po czasie, to więzy tego typu nazywamy **nieholonomicznymi**.

Więzy kinematyczne całkowalne i więzy geometryczne nazywamy więzami holonomicznymi. Więzy kinematyczne niecałkowalne nazywamy więzami nieholonomicznymi.

Przykład 1.1.
Punkt materialny porusza się po powierzchni $3x - 6y + z - 2 = 0$. Określić rodzaje więzów.

W tym przykładzie mamy do czynienia z więzami geometrycznymi (równanie nie zawiera prędkości) i skleronomicznymi (w równaniu nie występuje jawnie czas).

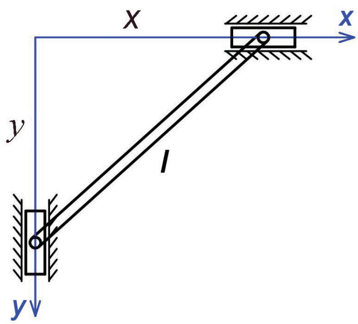
Przykład 1.2.
Rozważmy bęben, na który nawinięta jest nieważka nić o długości części swobodnej w chwili $t = 0$ równej d. Na końcu nici zawieszono punkt materialny o masie m. Wraz z upływem czasu nić rozwija się zgodnie z równaniem $l(t)$.



Rys. 1.1. Ilustracja do przykładu 1.2

W tym przypadku występują więzy reonomiczne (niestacjonarne). Równanie więzów możemy zapisać następująco: $l(t) = d + r\dot{\varphi}(t)t$.

Przykład 1.3.
Rozważmy dwa elementy połączone prętem o stałej długości l.



Rys. 1.2. Ilustracja do przykładu 1.3

W tym przypadku równanie więzów ma postać: $x^2 + y^2 = l^2$. Mamy tutaj do czynienia z układem holonomicznym i skleronomicznym. Są to też więzy geometryczne.

Przykład 1.4.
Dane jest równanie więzów kinematycznych całkowalnych: $3x\dot{y} - 2\dot{x} = 0$. Wykazać, że jest ono równoważne więzom geometrycznym.

Zadane równanie w postaci $f(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ jest równaniem różniczkowym rzędu I o zmiennych rozdzielonych, zatem możemy rozdzielić te zmienne i wyznaczyć $\dot{y}$:

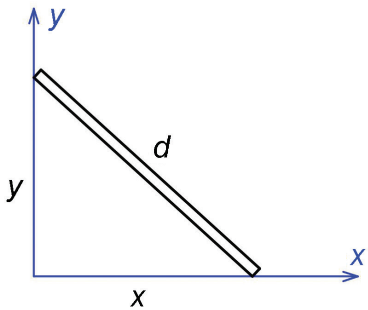
$$\dot{y} = \frac{2\dot{x}}{3x}$$

Całkując stronami, otrzymujemy:

$$y = \frac{2}{3}\ln x + C$$

co odpowiada więzom geometrycznym danym równaniem $f(x, y) = 0$.

Przykład 1.5.
Rozważmy zsuwający się bez tarcia pręt o długości d.



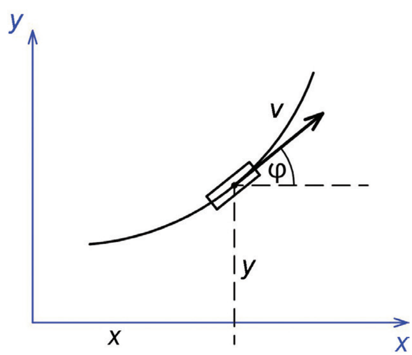
Rys. 1.3. Ilustracja do przykładu 1.5

Możemy zapisać tutaj geometryczne równanie więzów w postaci:

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - d^2 = 0$$

Przykład 1.6.
Rozważmy ciało poruszające się po torze krzywoliniowym, bez tarcia, z prędkością v. Zapisać równanie więzów.



Rys. 1.4. Ilustracja do przykładu 1.6

Po rozłożeniu prędkości na składowe v_x i v_y możemy zapisać zależność:

$$tg\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

Mamy tutaj do czynienia z więzami nieholonomicznymi, niecałkowalnymi, kinematycznymi.

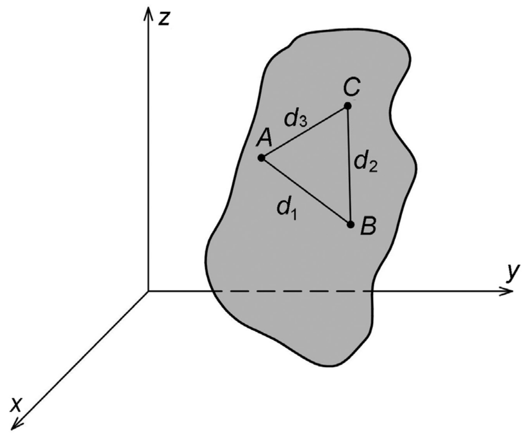
1.2. LICZBA STOPNI SWOBODY

Rozważmy swobodny punkt materialny. Na płaszczyźnie posiada on dwa stopnie swobody, a w przestrzeni trójwymiarowej trzy, gdyż do jednoznacznego określenia jego położenia potrzeba na płaszczyźnie dwóch, a w przestrzeni – trzech niezależnych współrzędnych. Zatem liczba stopni swobody odpowiada liczbie wymiarów przestrzeni, w której znajduje się punkt.

Liczbę niezależnych współrzędnych określających położenie w przestrzeni danego układu n punktów materialnych poddanych ograniczeniom ruchu wyrażającymi się za pomocą k równań nazywany **liczbą stopni swobody** tego układu i oznaczamy jako s:

$$s = 3n - k$$

Rozpatrzmy ciało doskonale sztywne. Do jednoznacznego opisania go w przestrzeni trójwymiarowej wystarczy znać położenie trzech punktów, które nie leżą na jednej prostej. Można zapisać trzy równania więzów, które określają stałą odległość między tymi punktami. Zatem ciało sztywne w przestrzeni będzie miało 6 stopni swobody. Może wykonać trzy translacje i trzy obroty. Wówczas mówimy, że bryła jest swobodna.



Rys. 1.5. Swobodna bryła sztywna w przestrzeni trójwymiarowej

Równania więzów:

$$d_1^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$d_2^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2$$

$$d_3^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2$$

Gdy rozważymy to samo ciało doskonale sztywne, ale w przestrzeni euklidesowej dwuwymiarowej, wówczas ma tylko 3 stopnie swobody, dwie translacje i jeden obrót.

Jeżeli rozważamy układ n-ciał sztywnych znajdujących się w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej, połączonych za pomocą różnego rodzaju podparć, wówczas liczbę stopni swobody takiego układu możemy zapisać, korzystając ze wzoru:

$$s = 3n - \sum_{i=1}^{p} w_i$$

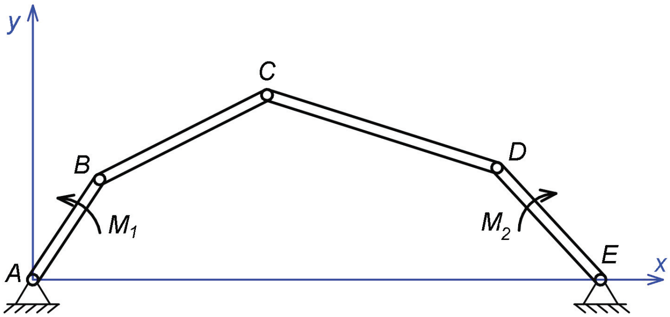
gdzie:
n – liczba ciał sztywnych,
p – liczba podparć,
w_i – liczba odebranych stopni swobody (reakcji więzów) w i-tym podparciu.

Jeżeli rozważamy układ n-ciał sztywnych i m-punktów materialnych, znajdujących się w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej, połączonych za pomocą różnego rodzaju podparć, wówczas liczbę stopni swobody takiego układu możemy zapisać, korzystając ze wzoru:

$$s = 3n + 2m - \sum_{i=1}^{0} w_i$$

gdzie:
n – liczba ciał sztywnych,
m – liczba punktów materialnych,
p – liczba podparć,
w_i – liczba odebranych stopni swobody (reakcji więzów) w i-tym podparciu.

Przykład 1.7.
Dany jest mechanizm przedstawiony na rys. 1.6. Określić liczbę stopni swobody tego mechanizmu.

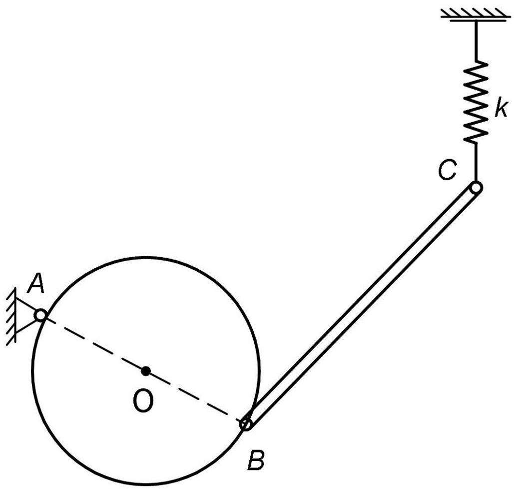


Rys. 1.6. Mechanizm do przykładu 1.7

Mechanizm składa się z ciał sztywnych, podparć (3 połączenia przegubowe i 2 podpory stałe przegubowe). Na każdym podparciu odbieramy dwa stopnie swobody, zatem liczba stopni swobody naszego mechanizmu wynosi:

$$s = 3 \cdot 4 - 5 = 2$$

Przykład 1.8.
Dany jest mechanizm przedstawiony na rys. 1.7. Określić liczbę stopni swobody tego mechanizmu.

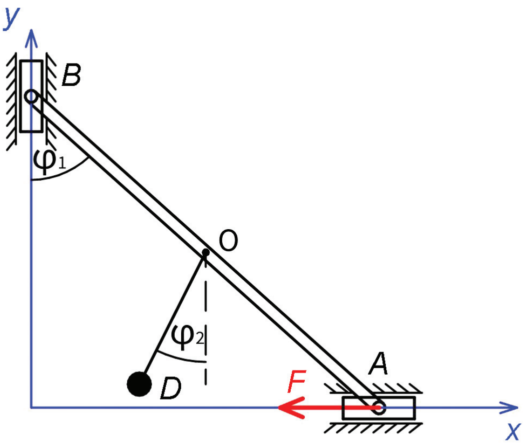


Rys. 1.7. Mechanizm do przykładu 1.8

Mechanizm składa się z ciał sztywnych, ma podparcia (1 połączenie przegubowe belki z krążkiem i 1 podporę stałą przegubową). Na każdym podparciu odbieramy dwa stopnie swobody, zatem liczba stopni swobody naszego mechanizmu jest równa:

$$s = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$$

Przykład 1.9.
Dany jest mechanizm przedstawiony na rysunku 1.8. Określić liczbę stopni swobody tego mechanizmu.



Rys. 1.8. Mechanizm do przykładu 1.9

Mechanizm składa się z ciała sztywnego (belki) i punktu materialnego, ma 3 podparcia (1 cięgno i 2 suwaki). Na każdym podparciu odbieramy po jednym stopniu swobody, zatem liczba stopni swobody naszego mechanizmu jest równa:

$$s = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - (2 \cdot 1 + 1) = 2$$

II. ZASADA PRAC WIRTUALNYCH

2.1. WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE

Położenie nieswobodnego układu materialnego można wyrazić za pomocą odpowiednio dobranych niezależnych parametrów, które będziemy nazywać **współrzędnymi uogólnionymi**. Liczba współrzędnych uogólnionych jest równa liczbie stopni swobody układu.

Współrzędne prostokątne dowolnego punktu należącego do nieswobodnego układu materialnego można przedstawić za pomocą współrzędnych uogólnionych.

Jeżeli mamy układ złożony z punktów materialnych, to położenie tych punktów można wyrazić za pomocą współrzędnych uogólnionych oraz we współrzędnych prostokątnych:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$$

2.2. PRZESUNIĘCIA PRZYGOTOWANE

Rozważmy nieswobodny punkt materialny, który musi pozostawać na pewnej nieruchomej powierzchni. Zadamy temu punktowi pewne elementarne przesunięcie, zgodnie z nałożonymi na punkt więzami. Wektor przesunięcia elementarnego musi leżeć na płaszczyźnie stycznej w punkcie do tej powierzchni. Wektor ten nie przedstawia rzeczywistego przesunięcia tylko przesunięcie pomyślane. Tak zdefiniowany wektor nazwiemy **przesunięciem przygotowanym**.

Jako przesunięcie przygotowane można też przyjąć każdy elementarny wektor proporcjonalny do możliwej prędkości danego punktu.

Wektor przesunięcia przygotowanego można przedstawić jako wariacje jego współrzędnych:

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\delta x + \boldsymbol{j}\delta y + \boldsymbol{k}\delta z \qquad (2.1)$$

W przypadku punktu nieswobodnego wariacje δx, δy, δz nie są od siebie niezależne. Załóżmy, że punkt A podlega więzom danym w postaci:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2.2}$$

Po przemieszczeniu punktu A o przesunięcie przygotowane jego współrzędne będą spełniały równanie:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0 \tag{2.3}$$

zatem:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z) = 0 \tag{2.4}$$

Uwzględniając fakt, że δx, δy, δz są małymi wielkościami, na podstawie rozwinięcia w szereg Taylora, przy ograniczeniu do członów liniowych mamy:

$$\frac{\delta f}{\delta x}\delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\delta y + \frac{\delta f}{\delta z}\delta z = 0 \tag{2.5}$$

Powyższe równanie jest warunkiem prostopadłości wektora $\delta \boldsymbol{r}$ do normalnej do powierzchni o równaniu $f(x, y, z) = 0$ w punkcie o współrzędnych $f(x, y, z)$, co można również zapisać w postaci iloczynu skalarnego $\frac{\delta f}{\delta r} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$.

W przypadku gdy rozpatrujemy nieswobodny układ punktów materialnych A_1, A_2, …, A_n, to poszczególnym punktom możemy zadać przesunięcia przygotowane zgodnie z nałożonymi więzami w postaci:

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \qquad v = 1, 2, \dots, k \tag{2.6}$$

Składowe przesunięć przygotowanych $\delta \boldsymbol{r}_i = (\delta x_i, \delta y_I, \delta z_i)$ rozpatrywanych punktów układu muszą spełniać równania:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_v}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_v}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_v}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad v = 1, 2, ..., k \tag{2.7}$$

Jeżeli położenie rozpatrywanego układu punktów materialnych określimy za pomocą współrzędnych uogólnionych q_1, q_2, …, q_s, to współrzędne prostokątne punktów A_1, A_2, …, A_n, możemy wyrazić jako:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \qquad y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \qquad z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

Współrzędne (x_i, y_i, z_i) są składowymi promienia wektora $\boldsymbol{r}_i$ punktu A. Wektor ten możemy traktować jako funkcję skalarnych parametrów q_1, q_2, …, q_s:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \tag{2.8}$$

Współrzędne uogólnione nie są od siebie zależne, zatem ich wariacje nie są ze sobą związane i mogą nimi być dowolne elementarne wielkości. Punkty materialne rozpatrywanego układu doznają przesunięć elementarnych $\delta\boldsymbol{r}_1$, $\delta\boldsymbol{r}_2$, …, $\delta\boldsymbol{r}_n$. Przesunięcia te są zgodne z więzami i są przesunięciami przygotowanymi punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta z_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Ogólnie:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{2.9}$$

2.3. PRACA PRZYGOTOWANA

Załóżmy, że punkt A, na który działa siła $\boldsymbol{P}$, doznał przesunięcia przygotowanego $\delta\boldsymbol{r}$. Pracę siły $\boldsymbol{P}$ na tym przesunięciu nazwiemy pracą przygotowaną (wirtualną) i wyrazimy wzorem:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \delta\boldsymbol{r} \tag{2.10}$$

Jeżeli siła ma składowe $P(P_x, P_y, P_z)$, a przesunięcie przygotowane $\delta\boldsymbol{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$, to pracę przygotowaną można wyrazić następująco:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \delta\boldsymbol{r} = P_x\delta x + P_y\delta y + P_z\delta z \tag{2.11}$$

Pracę przygotowaną możemy wyrazić również, korzystając z definicji iloczynu skalarnego jako:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \delta\boldsymbol{r} = P\delta s \cos\alpha \tag{2.12}$$

gdzie:

P – wartość bezwzględna siły $\boldsymbol{P}$,
δs – wartość bezwzględna przesunięcia przygotowanego $\delta\boldsymbol{r}$,
α – kąt zawarty między wektorem siły $\boldsymbol{P}$ i wektorem przesunięcia $\delta\boldsymbol{r}$.

W przypadku gdy na układ punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ działają siły $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_n}$, to suma prac przygotowanych jest równa:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta s_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi} \delta x_i + P_{yi} \delta y_i + P_{zi} \delta z_i \right) \quad (2.13)$$

W przypadku nieswobodnego punktu materialnego oprócz siły $\boldsymbol{P}$ na punkt A działa również siła reakcji więzów $\boldsymbol{R}$. W przypadku **więzów nieidealnych** (z tarciem) praca wykonana przez siły reakcji więzów $\boldsymbol{R}$ jest równa: $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r}$.

Praca wykonana przez siłę $\boldsymbol{R}$ jest równa zero, tylko w przypadku gdy więzy są **więzami idealnymi**, czyli więzami bez tarcia. Z więzami idealnymi mamy do czynienia, gdy więzy są realizowane za pomocą gładkich powierzchni lub linii, po których mogą się poruszać punkty nieswobodnego układu materialnego. Gdy ta swoboda zostanie ograniczona w ten sposób, że odległość między tymi punktami nie ulegnie zmianie, to wówczas również mamy do czynienia z więzami idealnymi.

Załóżmy, że układ nieswobodnych punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest w równowadze. Niech $\boldsymbol{P_i}$ oznacza siłę czynną przyłożoną do punktu A_i, a $\boldsymbol{R_i}$ oznacza reakcję więzów. Siły $\boldsymbol{P_i}$ i $\boldsymbol{R_i}$ muszą spełniać równanie:

$$\boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{R_i} = 0 \quad (2.14)$$

Każdy punkt materialny rozważanego układu doznaje dowolnego przemieszczenia przygotowanego zgodnie z więzami, a siła wypadkowa $\boldsymbol{P_i}$ i $\boldsymbol{R_i}$ jest równa zero, więc suma prac na dowolnym przesunięciu przygotowanym musi być równa zero.

Zatem:

$$\boldsymbol{P_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{R_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0 \quad (2.15)$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{P_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{R_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0 \quad (2.16)$$

2.4. ZASADA PRAC WIRTUALNYCH

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu materialnego jest, aby suma prac przygotowanych wszystkich sił czynnych i reakcji więzów przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym układu była równa zero.

Dla układu nieswobodnego o więzach idealnych zasada przyjmuje postać:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{P_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{R_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0 \quad (2.17)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu materialnego o więzach idealnych jest, aby suma prac przygotowanych (wirtualnych) wszystkich sił czynnych przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym układu była równa zero.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{2.18}$$

2.5. SIŁY UOGÓLNIONE

Rozważmy nieswobodny układ materialny, na który nałożono więzy idealne, określony za pomocą niezależnych współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \ldots, q_s$, na który działają siły zewnętrzne $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. Pracę przygotowaną możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi}\delta x_i + P_{yi}\delta y_i + P_{zi}\delta z_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j + P_{yi} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j + P_{zi} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{s} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \tag{2.19}$$

Przyjmijmy:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{2.20}$$

Wówczas wyrażenie na pracę przyjmie postać:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \tag{2.21}$$

Wielkości określone wzorem:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{yj}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{2.22}$$

nazywamy **siłami uogólnionymi** odpowiadającymi współrzędnym $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Pracę przygotowaną δL możemy wyznaczać jako sumę iloczynów wariacji współrzędnych uogólnionych przez odpowiednie siły uogólnione.

2.6. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WE WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH

Wychodząc z zasady prac przygotowanych, można wyprowadzić ogólne warunki równowagi sił działających na ciało sztywne. W tym celu rozważmy swobodne ciało sztywne, do którego w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ przyłożono siły $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. Ciało dozna przemieszczenia przygotowanego w postaci:

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_0 + \delta\varphi \times \boldsymbol{r}_i \tag{2.23}$$

gdzie:
$\delta \boldsymbol{r}_0$ – przesunięcie przygotowane dowolnie obranego punktu O,
$\delta\varphi$ – wektor elementarnego obrotu,
$\boldsymbol{r}_i$ – poprowadzony z punktu O promień wektor A_i.

Praca sił wewnętrznych (reakcji więzów) jest równa zero, zatem pracę wykonają tylko siły zewnętrzne $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ na przemieszczeniu przygotowanym $\delta \boldsymbol{r}_i$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \delta L_i &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i \cdot \left(\delta \boldsymbol{r}_0 + \delta\varphi \times \boldsymbol{r}_i\right) = \\ &= \delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i \cdot \left(\delta\varphi \times \boldsymbol{r}_i\right) = \\ &= \delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i + \delta\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{P}_i\right) = 0\end{aligned} \tag{2.24}$$

Korzystając z własności iloczynu mieszanego trzech wektorów, wiemy, że:

$$\boldsymbol{P}_i \cdot (\delta\varphi \times \boldsymbol{r}_i) = \delta\varphi \cdot (\mathrm{r}_i \times \mathrm{P}_i) \tag{2.25}$$

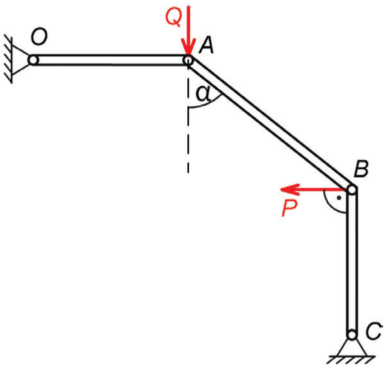
Aby równanie było spełnione, wówczas:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times P_i) = 0 \tag{2.26}$$

Ponieważ $(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{P}_i)$ jest równe momentowi siły $\boldsymbol{P}_i$ względem punktu O, zatem otrzymaliśmy ogólne warunki równowagi sił przyłożonych do ciała sztywnego.

2.7. ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 2.1.
Na rysunku 2.2 przedstawiono układ jednorodnych prętów połączonych przegubowo. Do układu w punkcie A przyłożono siłę Q. Pomijając ciężary tych prętów, wyznacz wartość siły P, jaką należy przyłożyć w punkcie B, aby układ pozostał w równowadze.

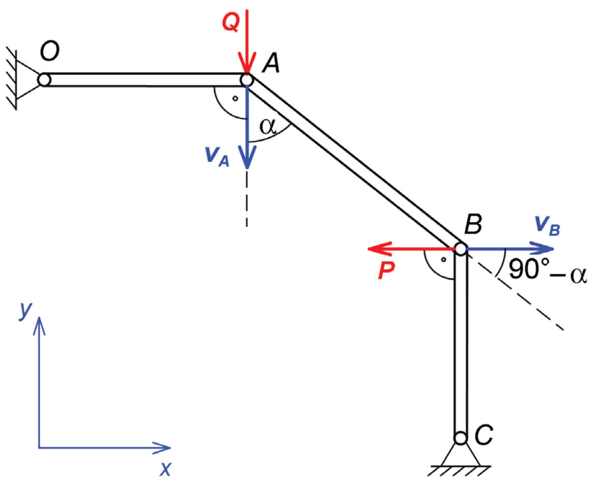


Rys. 2.1. Mechanizm do zadania 2.1

Rozwiązanie:
Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}} = 0$$

Przemieszczenia przygotowane $\boldsymbol{\delta}_A$ i $\boldsymbol{\delta}_B$ można potraktować jako wektory proporcjonalne do prędkości $\boldsymbol{v}_A$ i $\boldsymbol{v}_B$, zatem rozkładając wektory sił i prędkości na składowe oraz korzystając z definicji iloczynu skalarnego, mamy:



Rys. 2.1a

$$\delta L = (0,-Q)\cdot(0,-v_A)+(-P,0)\cdot(v_B,0)=0$$

$$Qv_A - Pv_B = 0$$

Korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości na kierunek pręta AB, w naszym przypadku otrzymujemy:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos(90° - \alpha)$$

$$v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha$$

Z tego równania można wyliczyć v_A w zależności od v_B:

$$v_A = v_B \operatorname{tg} \alpha$$

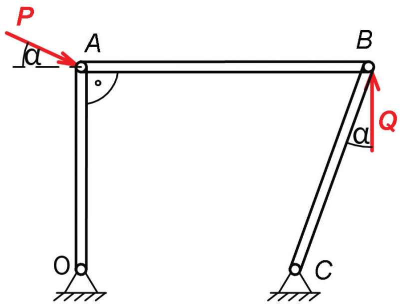
Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$Qv_B \operatorname{tg} \alpha - Pv_B = 0$$

Szukana wartość siły P jest równa:

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha$$

Zadanie 2.2.
Na rysunku 2.2 przedstawiono układ jednorodnych prętów połączonych przegubowo. Do układu w punkcie A przyłożono siłę P pod kątem α. Pomijając ciężary tych prętów, wyznacz wartość siły Q, jaką należy przyłożyć w punkcie B, aby układ pozostał w równowadze.

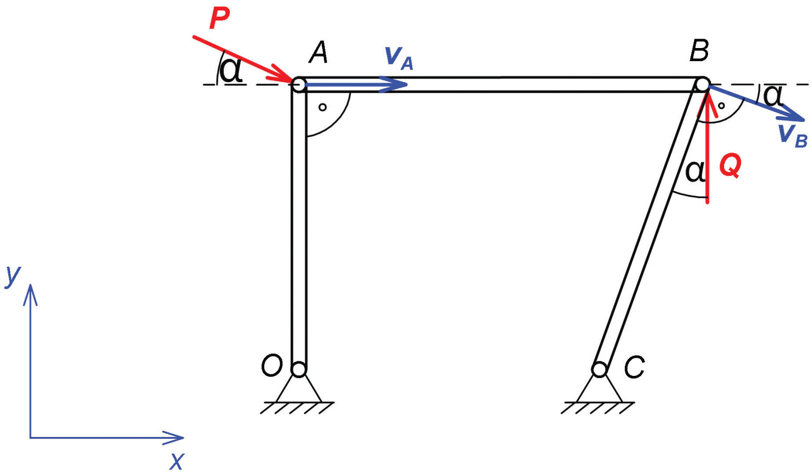


Rys. 2.2. Mechanizm do zadania 2.2

Rozwiązanie:
Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_A + \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\delta}_B = 0$$

Przemieszczenia przygotowane $\boldsymbol{\delta}_A$ i $\boldsymbol{\delta}_B$ można potraktować jako wektory proporcjonalne do prędkości $\boldsymbol{v}_A$ i $\boldsymbol{v}_B$, zatem rozkładając wektory sił i prędkości na składowe oraz korzystając z definicji iloczynu skalarnego mamy:



Rys. 2.2a

$$\delta L = \left(P\cos\alpha, -P\sin\alpha\right)\cdot\left(v_A, 0\right) + \left(0, Q\right)\cdot\left(v_B\cos\alpha, -v_B\sin\alpha\right) = 0$$

$$Pv_A\cos\alpha - Qv_B\sin\alpha = 0$$

Korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości na kierunek pręta AB, w naszym przypadku otrzymujemy:

$$v_A = v_B\cos\alpha$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

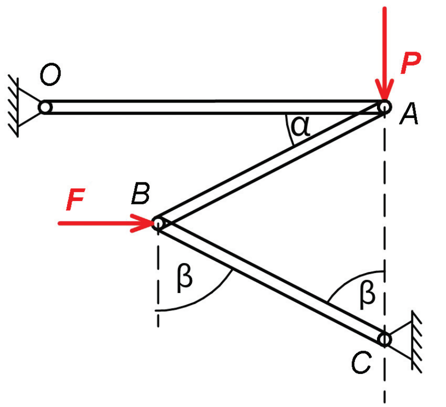
$$Pv_B\cos^2\alpha - Qv_B\sin\alpha = 0$$

Szukana wartość siły Q jest równa:

$$Q = \frac{P\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = P\mathrm{ctg}\alpha\cos\alpha$$

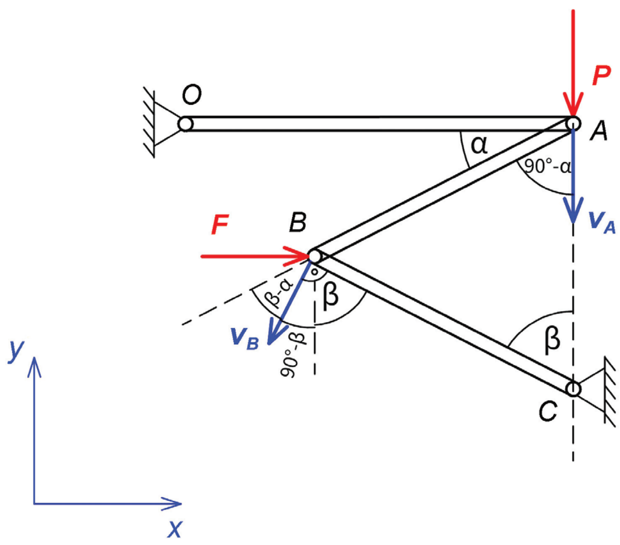
Zadanie 2.3.

Na rysunku 2.3 przedstawiono układ jednorodnych prętów połączonych przegubowo. Do układu w punkcie A przyłożono siłę P pod kątem prostym do pręta OA. Pomijając ciężary tych prętów, wyznacz wartość siły F, jaką należy przyłożyć w punkcie B, aby układ pozostał w równowadze.



Rys. 2.3. Mechanizm do zadania 2.3

Rozwiązanie:
Zaznaczmy na rysunku możliwe wektory prędkości tych punktów, w których przyłożone są siły:



Rys. 2.3a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_A + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\delta}_B = 0$$

Przemieszczenia przygotowane $\boldsymbol{\delta}_A$ i $\boldsymbol{\delta}_B$ można potraktować jako wektory proporcjonalne do prędkości $\boldsymbol{v}_A$ i $\boldsymbol{v}_B$, zatem rozkładając wektory sił i prędkości na składowe oraz korzystając z definicji iloczynu skalarnego, mamy:

$$\delta L = (0,-P)\cdot(0,-v_A) + (F,0)\cdot(-v_B\cos\beta, -v_B\sin\beta) = 0$$

$$Pv_A - Fv_B\cos\beta = 0$$

Korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości na kierunek pręta AB, w naszym przypadku otrzymujemy:

$$v_A\cos(90^\circ - \alpha) = v_B\cos(\beta - \alpha)$$

$$v_A\sin\alpha = v_B\cos(\beta - \alpha)$$

Z tego równania można wyliczyć v_A w zależności od v_B:

$$v_A = \frac{v_B\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

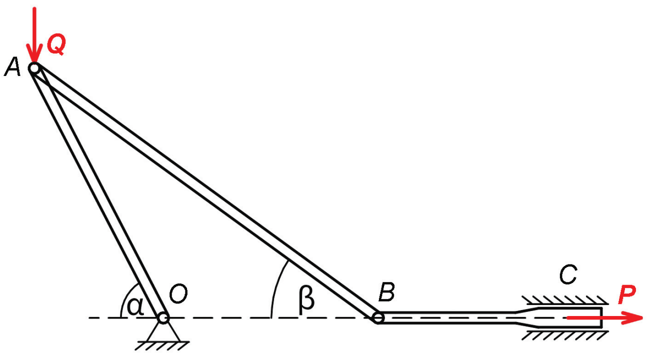
$$P\frac{v_B\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} - Fv_B\cos\beta = 0$$

$$\left(P\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} - F\cos\beta\right)v_B = 0$$

Wiedząc, że $v_B \neq 0$, szukana wartość siły F jest równa:

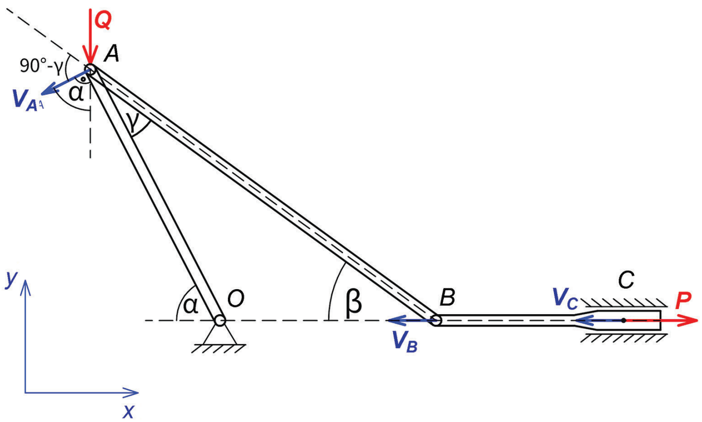
$$F = \frac{P\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$$

Zadanie 2.4.
Na mechanizm przedstawiony na rys. 2.4 działa siła Q przyłożona w punkcie A. Pomijając ciężary prętów, z których zbudowany jest mechanizm i przyjmując kąty α i β jako dane oraz $\alpha > \beta$, wyznacz wartość siły P, jaką należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze.



Rys. 2.4. Mechanizm do zadania 2.4

Rozwiązanie:
Zaznaczmy na rysunku możliwe wektory prędkości dla punktów A, B, C danego mechanizmu:



Rys. 2.4a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\delta}_A + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_C = 0$$

Przemieszczenia przygotowane $\boldsymbol{\delta}_A$ i $\boldsymbol{\delta}_C$ można potraktować jako wektory proporcjonalne do prędkości $\boldsymbol{v}_A$ i $\boldsymbol{v}_C$, zatem rozkładając wektory sił i prędkości na składowe oraz korzystając z definicji iloczynu skalarnego, mamy:

$$\delta L = (0,-Q) \cdot (-v_A \sin\alpha, -v_A \cos\alpha) + (P,0) \cdot (-v_C, 0) = 0$$

$$Q v_A \cos\alpha - P v_C = 0$$

Z trójkąta OAB możemy wyliczyć kąt γ:

$$\gamma = \alpha - \beta$$

Korzystając z twierdzenia o rzutach prędkości na kierunek pręta AB, otrzymujemy:

$$v_A \cos\left(90^\circ - \gamma\right) = v_B \cos\beta$$

$$v_A \sin\left(\alpha - \beta\right) = v_B \cos\beta$$

Z tego równania można wyliczyć v_B w zależności od v_A:

$$v_B = \frac{v_A \sin\left(\alpha - \beta\right)}{\cos\beta}$$

Pręt BC może wykonywać tylko ruch postępowy, zatem:

$$v_B = v_C$$

Wstawiając powyższe zależności do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$Qv_A \cos\alpha - P\frac{v_A \sin\left(\alpha - \beta\right)}{\cos\beta} = 0$$

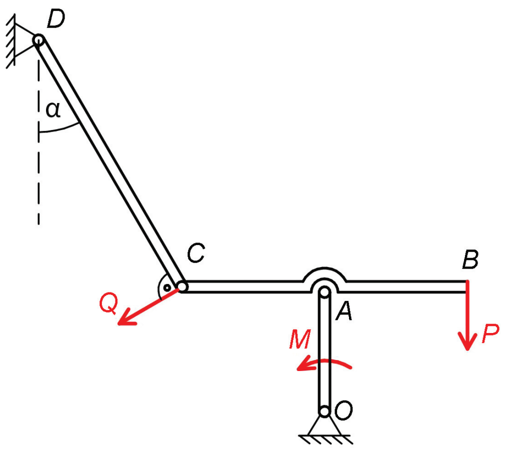
$$\left(Q\cos\alpha - P\frac{\sin\left(\alpha - \beta\right)}{\cos\beta}\right)v_A = 0$$

Wiedząc, że $v_A \neq 0$ szukana wartość siły P jest równa:

$$P = \frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{\sin\left(\alpha - \beta\right)}$$

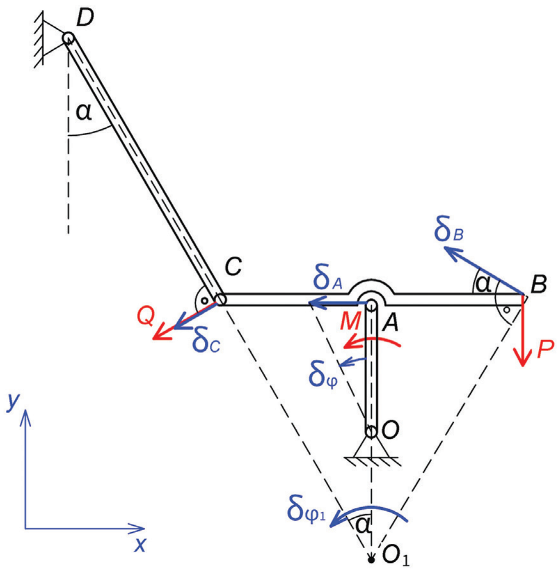
Zadanie 2.5.

Mechanizm przedstawiony na rys. 2.5 składa się z trzech jednorodnych prętów o długościach: |OA| = |AB| = |AC| = l, |CD| = $2l$. Mechanizm wprawiany jest w ruch za pomocą znanego momentu M przyłożonego do korby OA. W punkcie C, prostopadle do pręta CD, przyłożono siłę Q. Kąt przyjmij jako dany. Znajdź wartość siły P, którą należy przyłożyć w punkcie B, aby ten mechanizm pozostał w równowadze.



Rys. 2.5. Mechanizm do zadania 2.5

Rozwiązanie:
Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu.



Rys. 2.5a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta\varphi} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{B}} = 0$$

Kierunek i zwrot siły $\boldsymbol{Q}$ oraz wektora przemieszczenia $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{C}}$ są takie same, zatem nie musimy ich rozkładać na składowe, gdyż ich iloczyn skalarny będzie wynosił $Q\delta_C$.

$$\delta L = Q\delta_C + M\delta\varphi + (0,-P)\cdot(-\delta_B\cos\alpha, \delta_B\sin\alpha) = 0$$

$$Q\delta_C + M\delta\varphi - P\delta_B\sin\alpha = 0$$

Korzystając z zasady chwilowego środka obrotu, wyznaczymy wszystkie przemieszczenia przygotowane w zależności od jednego, np. od $\delta\varphi$.

Wiedząc, że chwilowy środek obrotu pręta OA znajduje się w punkcie O, możemy zapisać przemieszczenie δ_A jako:

$$\delta_A = |\mathrm{OA}|\delta\varphi = l\delta\varphi$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta AB znajduje się w punkcie O_1, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta oraz jego wysokość:

$$|\mathrm{BO}_1| = |\mathrm{CO}_1| = \frac{l}{\sin\alpha}$$

$$|\mathrm{AO}_1| = l\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_1, możemy zapisać przemieszczenie δ_A następująco:

$$\delta_A = |\mathrm{AO}_1|\delta\varphi_1 = l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\delta\varphi_1$$

Porównując z wcześniej obliczonym δ_A, otrzymujemy:

$$l\delta\varphi = l\ \mathrm{ctg}\ \alpha\delta\varphi_1$$

Z powyższego równania wyznaczymy wartość $\delta\varphi_1$:

$$\delta\varphi_1 = \mathrm{tg}\ \alpha\delta\varphi$$

Przemieszczenie punktu B możemy zapisać jako:

$$\delta_\mathrm{B} = |\mathrm{BO}_1|\delta\varphi_1 = \frac{l}{\sin\alpha}\delta\varphi_1$$

Podstawiając za $\delta\varphi_1$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_\mathrm{B} = \frac{l\,\mathrm{tg}\alpha}{\sin\alpha}\delta\varphi$$

Przemieszczenie punktu C możemy zapisać jako:

$$\delta_C = |CO_1|\delta\varphi_1$$

Wiedząc, że $|CO_1| = |BO_1|$, przemieszczenie punktu C będzie takie samo jak przemieszczenie punktu B, zatem:

$$\delta_C = \delta_B$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

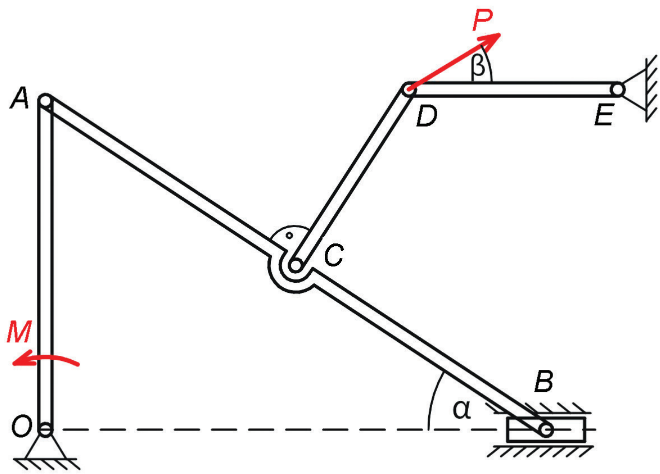
$$Q\frac{l\,\text{tg}\alpha}{\sin\alpha}\delta\varphi + M\delta\varphi - Pl\,\text{tg}\alpha\delta\varphi = 0$$

$$\left(Q\frac{l\,\text{tg}\,\alpha}{\sin\alpha} + M - Pl\,\text{tg}\,\alpha\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$, wyznaczymy wartość szukanej siły P:

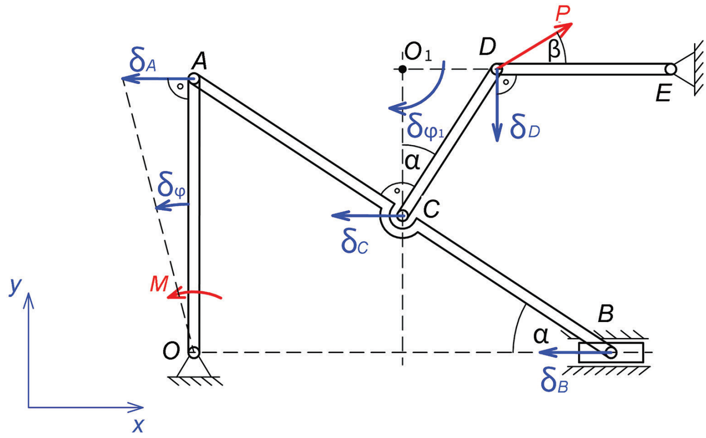
$$P = \frac{M}{l\text{tg}\alpha} + \frac{Q}{\sin\alpha}$$

Zadanie 2.6.
Do mechanizmu składającego się z czterech jednorodnych prętów o długościach: $|OA| = 3l$, $|AB| = |BC| = 2l$, $|CD| = |DE| = d$ oraz suwaka B przedstawionego na rys. 2.6. w punkcie D przyłożono siłę P pod kątem β. Wyznacz wartość momentu, jaki należy przyłożyć do korby OA, aby mechanizm pozostał w równowadze. Kąty α i β przyjmij jako dane. Siły ciężkości zaniedbać.



Rys. 2.6. Mechanizm do zadania 2.6

Rozwiązanie:
Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu.



Rys. 2.6a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta\varphi} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{D}} = 0$$

$$\delta L = M\delta\varphi + \left(P\cos\beta, P\sin\beta\right) \cdot \left(0, -\delta_{\mathrm{D}}\right) = 0$$

$$M\delta\varphi - P\sin\beta\delta_{\mathrm{D}} = 0$$

Wiedząc, że chwilowy środek obrotu pręta OA znajduje się w punkcie O, możemy zapisać przemieszczenie δ_{A} jako:

$$\delta_{\mathrm{A}} = |\mathrm{OA}|\delta\varphi = 3l\delta\varphi$$

Pręt AB nie ma chwilowego środka obrotu w tym położeniu, zatem:

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta CD znajduje się w punkcie O_1, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta CDO_1:

$$|\mathrm{DO}_1| = d \sin \alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_1, możemy zapisać przemieszczenie δ_{C} następująco:

$$\delta_C = |CO_1|\delta\varphi_1 = d\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Porównując z wcześniej obliczonym δ_C, otrzymujemy:

$$3l\delta\varphi = d\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Z powyższego równania wyznaczymy wartość $\delta\varphi_1$:

$$\delta\varphi_1 = \frac{3l\delta\varphi}{d\cos\alpha}$$

Przemieszczenie punktu D możemy zapisać jako:

$$\delta_D = |DO_1|\delta\varphi_1 = d\sin\alpha\delta\varphi_1$$

Podstawiając za $\delta\varphi_1$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_D = 3l\,\mathrm{tg}\alpha\,\delta\varphi$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$M\delta\varphi - P\sin\beta 3l\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi = 0$$

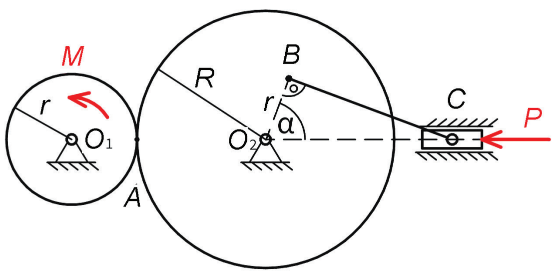
$$\left(M - 3Pl\sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$ wyznaczymy wartość momentu M:

$$M = 3Pl\sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha$$

Zadanie 2.7.

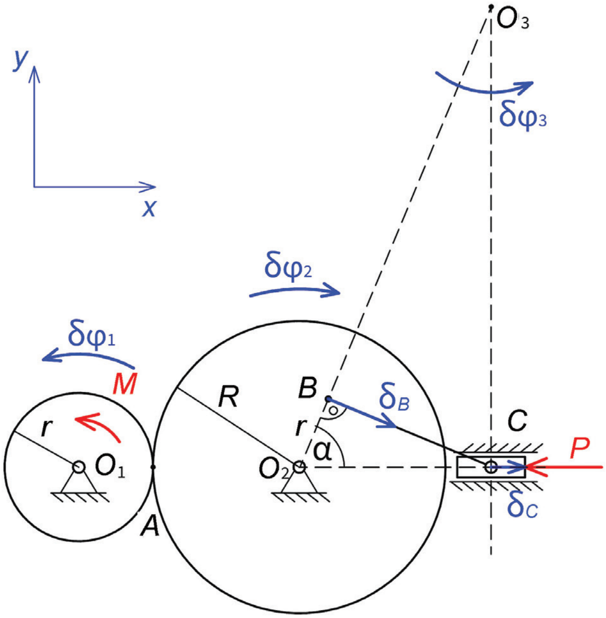
Do mechanizmu przedstawionego na rys. 2.7 składającego się z dwóch kół o promieniach odpowiednio r i R i jarzma BC o długości $3r$ przyłożono w punkcie C siłę P. Oblicz wartość momentu M, jaki należy przyłożyć do koła o środku w punkcie O_1, aby układ pozostał w równowadze. Kąt α przyjmij jako dany. Siły ciężkości i tarcie pominąć.



Rys. 2.7. Mechanizm do zadania 2.7

Rozwiązanie:

Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu w punktach A, O_1, O_2, O_3.



Rys. 2.7a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta\varphi}_1 + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_C = 0$$

$$\delta L = M\delta\varphi_1 + (-P,0) \pm \cdot (\delta_C, 0) = 0$$

$$M\delta\varphi_1 - P\delta_C = 0$$

Punkt A znajduje się na styku krążka o środku O_1 i krążka o środku O_2, zatem możemy porównać prędkości:

$$r\delta\varphi_1 = R\delta\varphi_2$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{r}{R}\delta\varphi_1$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta BC znajduje się w punkcie O_3, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta BCO_3, wiedząc, że $\sphericalangle BO_3C = \alpha$, gdyż $\Delta BCO_3 \sim \Delta CO_2O_3$.

$$|CO_3| = \frac{3r}{\sin\alpha}$$

$$|BO_3| = 3r\text{ctg}\alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_2, możemy zapisać przemieszczenie δ_B następująco:

$$\delta_B = |BO_2|\delta\varphi_2 = r\delta\varphi_2 = \frac{r^2}{R}\delta\varphi_1$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_3, możemy zapisać przemieszczenie δ_B następująco:

$$\delta_B = |BO_3|\delta\varphi_3 = 3r\text{ctg}\alpha\delta\varphi_3$$

Porównując otrzymane wzory na δ_B, wyrazimy $\delta\varphi_3$ za pomocą $\delta\varphi_1$:

$$3r\text{ctg}\alpha\delta\varphi_3 = \frac{r^2}{R}\delta\varphi_1$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{r\,\text{tg}\alpha}{3R}\delta\varphi_1$$

Przemieszczenie punktu C możemy zapisać jako:

$$\delta_C = |CO_3|\delta\varphi_3 = \frac{3r}{\sin\alpha}\delta\varphi_3$$

Podstawiając za $\delta\varphi_3$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_C = \frac{r^2}{R\cos\alpha}\delta\varphi_1$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

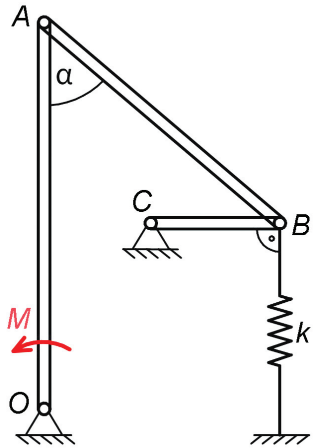
$$M\delta\varphi_1 - P\frac{r^2}{R\cos\alpha}\delta\varphi_1 = 0$$

$$\left(M - P\frac{r^2}{R\cos\alpha}\right)\delta\varphi_1 = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi_1 \neq 0$, wyznaczymy wartość momentu M:

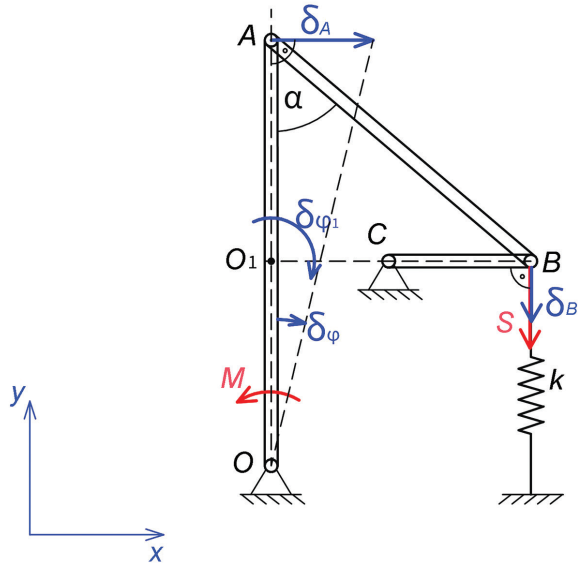
$$M = \frac{Pr^2}{R\cos\alpha}$$

Zadanie 2.8.
Do mechanizmu dwukorbowego składającego się z trzech jednorodnych prętów o długościach: $|OA| = 5l$, $|AB| = 3l$, $|BC| = l$ przedstawionego na rys. 2.8 w punkcie *B* zamocowano sprężynę o sztywności *k*. Wiedząc, że odkształcenie sprężyny jest równe *h*, wyznacz wartość momentu, jaki należy przyłożyć do korby OA, aby mechanizm pozostał w równowadze. Kąt α przyjmij jako dany.



Rys. 2.8. Mechanizm do zadania 2.8

Rozwiązanie:
Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu.



Rys. 2.8a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta\varphi} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} = 0$$

$$\delta L = -M\delta\varphi + (0, -S) \cdot (0, -\delta_{\mathrm{B}}) = 0$$

$$-M\delta\varphi + S\delta_{\mathrm{B}} = 0$$

Wiedząc, że chwilowy środek obrotu pręta *OA* znajduje się w punkcie *O*, możemy zapisać przemieszczenie δ_A jako:

$$\delta_{\mathrm{A}} = |\mathrm{OA}|\delta\varphi = 5l\delta\varphi$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta AB znajduje się w punkcie O_1, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta ABO_1:

$$|\mathrm{BO}_1| = 3l\sin\alpha$$

$$|\mathrm{AO}_1| = 3l\cos\alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_1, możemy zapisać przemieszczenie δ_{A} następująco:

$$\delta_{\mathrm{A}} = |\mathrm{AO}_1|\delta\varphi_1 = 3l\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Porównując z wcześniej obliczonym δ_{A}, otrzymujemy:

$$5l\delta\varphi = 3l\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Z powyższego równania wyznaczymy wartość $\delta\varphi_1$:

$$\delta\varphi_1 = \frac{5\delta\varphi}{3\cos\alpha}$$

Przemieszczenie punktu B możemy zapisać jako:

$$\delta_{\mathrm{B}} = |\mathrm{BO}_1|\delta\varphi_1 = 3l\sin\alpha\delta\varphi_1$$

Podstawiając za $\delta\varphi_1$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_{\mathrm{B}} = 5l\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$-M\delta\varphi + 5Sl\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi = 0$$

Siła ***S*** jest iloczynem sztywności i odkształcenia sprężyny, zatem wstawiając $S = kh$, otrzymujemy:

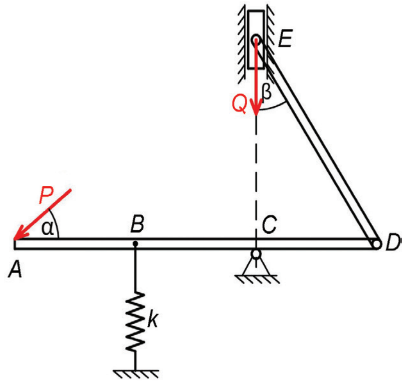
$$\left(-M + 5khl\,\mathrm{tg}\alpha\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$ wyznaczymy wartość momentu M:

$$M = 5khl\,\mathrm{tg}\alpha$$

Zadanie 2.9.

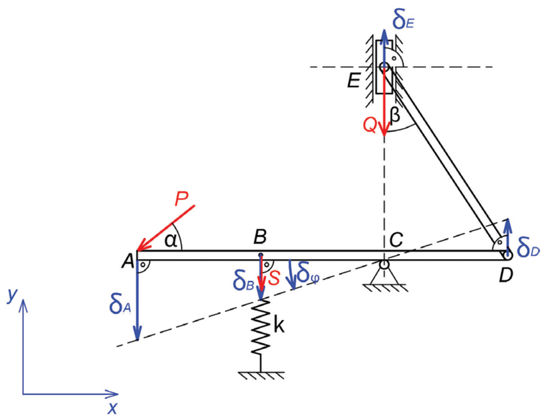
Do mechanizmu składającego się z dwóch jednorodnych prętów o długościach: $|AD| = 3l$, $|DE| = 1{,}5l$, $|AB| = |BC|$ $|BC| = l$ i suwaka E przedstawionego na rys. 2.9 w punkcie A przyłożono siłę P pod kątem α, a w punkcie B dołączono sprężynę o współczynniku sztywności k. Ugięcie sprężyny jest równe h. Wyznaczyć wartość siły Q, jaką należy przyłożyć do suwaka, aby mechanizm pozostał w równowadze. Kąty α i β przyjmij jako dane. Siły ciężkości zaniedbać.



Rys. 2.9. Mechanizm do zadania 2.9

Rozwiązanie:

Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu.



Rys. 2.9a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{E}} = 0$$

$$\delta L = (-P\cos\alpha, -P\sin\alpha)\cdot(0, -\delta_A) + (0, -S)\cdot(0, -\delta_{\mathrm{B}}) + (0, -Q)\cdot(0, \delta_{\mathrm{E}}) = 0$$

$$P\sin\alpha\delta_{\mathrm{A}} + S\delta_{\mathrm{B}} - Q\delta_{\mathrm{E}} = 0$$

Wiedząc, że chwilowy środek obrotu pręta AD znajduje się w punkcie C, możemy zapisać przemieszczenie punktów A, B, D jako:

$$\delta_{\mathrm{A}} = |\mathrm{AC}|\delta\varphi = 2l\delta\varphi$$
$$\delta_{\mathrm{B}} = |\mathrm{BC}|\delta\varphi = l\delta\varphi$$
$$\delta_{\mathrm{D}} = |\mathrm{CD}|\delta\varphi = l\delta\varphi$$

Pręt DE nie ma chwilowego środka obrotu, porusza się on ruchem postępowym, zatem:

$$\delta_{\mathrm{D}} = \delta_{\mathrm{E}}$$

Można zauważyć, że wszystkie przemieszczenia da się uzależnić od δ_B, zatem:

$$\delta_{\mathrm{B}} = \delta_{\mathrm{D}} = \delta_{\mathrm{E}}$$

$$\delta_{\mathrm{A}} = 2\delta_{\mathrm{B}}$$

Wstawiając do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$P\sin\alpha 2\delta_{\mathrm{B}} + S\delta_{\mathrm{B}} - Q\delta_{\mathrm{B}} = 0$$

$$(2P\sin\alpha + S - Q)\delta_{\mathrm{B}} = 0$$

Wiedząc, że $\delta_B \neq 0$ wyznaczymy, wartość szukanej siły Q:

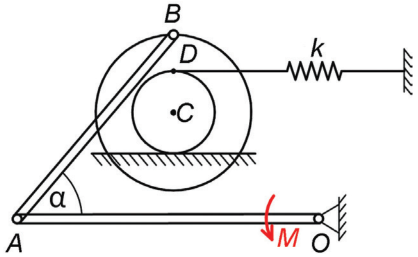
$$Q = 2P\sin\alpha + S$$

Wstawiając za $S = kh$, mamy:

$$Q = 2P\sin\alpha + kh$$

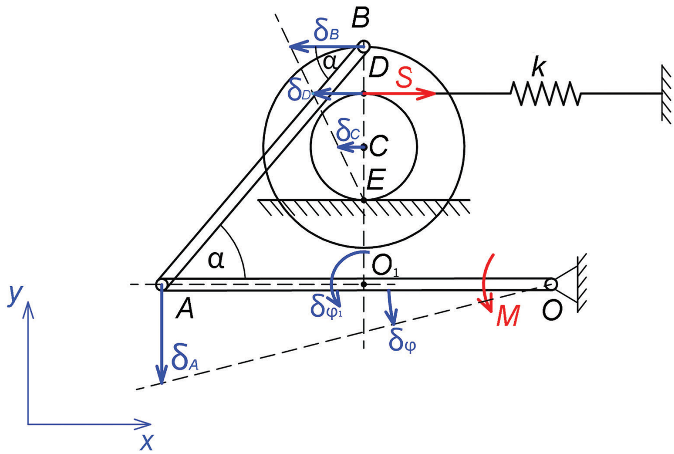
Zadanie 2.10.

Na rysunku 2.10 przedstawiono układ dwóch jednorodnych prętów: OA o długości l oraz AB o długości d połączonych przegubowo. Do układu prętów w punkcie B dołączono przegubowo walec współśrodkowy o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R. Walec przymocowany jest do ściany za pomocą sprężyny o sztywności k zamocowanej w punkcie D. Do pręta OA przyłożono znany moment M. Pomijając ciężary tych prętów oraz tarcie, znajdź odkształcenie sprężyny h tak, aby układ pozostał w równowadze. Kąt α przyjmij jako dany.



Rys. 2.10. Mechanizm do zadania 2.10

Rozwiązanie:
Zaczniemy od zaznaczenia na rysunku przemieszczeń przygotowanych i chwilowych środków obrotu.



Rys. 2.10a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta\varphi} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{D}} = 0$$

$$\delta L = M\delta\varphi + (S,0)\cdot(-\delta_{\mathrm{D}},0) = 0$$

$$M\delta\varphi - S\delta_{\mathrm{D}} = 0$$

Chwilowych środek obrotu pręta OA znajduje się w punkcie O, zatem przemieszczeniem δ_A możemy zapisać:

$$\delta_A = |OA|\delta\varphi = l\delta\varphi$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta AB znajduje się w punkcie O_1, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta :

$$|BO_1| = d\sin\alpha$$
$$|AO_1| = d\cos\alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_1, możemy zapisać przemieszczenie δ_A następująco:

$$\delta_A = |AO_1|\delta\varphi_1 = d\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Porównując z wcześniej obliczonym, otrzymujemy:

$$l\delta\varphi = d\cos\alpha\delta\varphi_1$$

Z powyższego równania wyznaczymy wartość $\delta\delta\varphi_1$:

$$\delta\varphi_1 = \frac{l\delta\varphi}{d\cos\alpha}$$

Przemieszczenie punktu B możemy zapisać jako:

$$\delta_B = |BO_1|\delta\varphi_1 = d\sin\alpha\delta\varphi_1$$

Podstawiając za $\delta\varphi_1$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_B = l\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi$$

Wiedząc, że w punkcie E znajduje się chwilowy środek obrotu naszego walca, korzystając z podobieństwa trójkątów, możemy wyznaczyć przemieszczenie δ_D najpierw w zależności od δ_B, a następnie od $\delta\varphi$:

$$\frac{\delta_D}{2r} = \frac{\delta_B}{r+R}$$

$$\delta_D = \frac{2r\delta_B}{r+R}$$

$$\delta_D = \frac{2rl\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi}{r+R}$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$M\delta\varphi - S\frac{2rl\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi}{r+R} = 0$$

$$\left(M - S\frac{2rl\mathrm{tg}\alpha}{r+R}\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$, wyznaczymy wartość siły S:

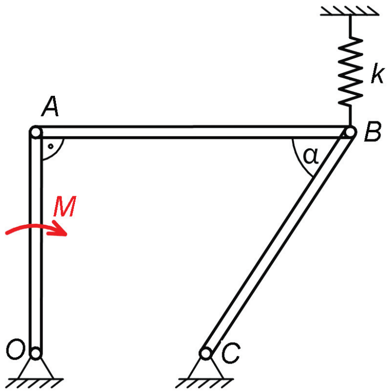
$$S = \frac{M(r+R)}{2rl\mathrm{tg}\alpha}$$

Siłę S możemy zapisać również jako $S = kh$, porównując te dwa wzory, otrzymujemy odkształcenie sprężyny równe:

$$h = \frac{M(r+R)}{2rlktg\alpha}$$

Zadanie 2.11.

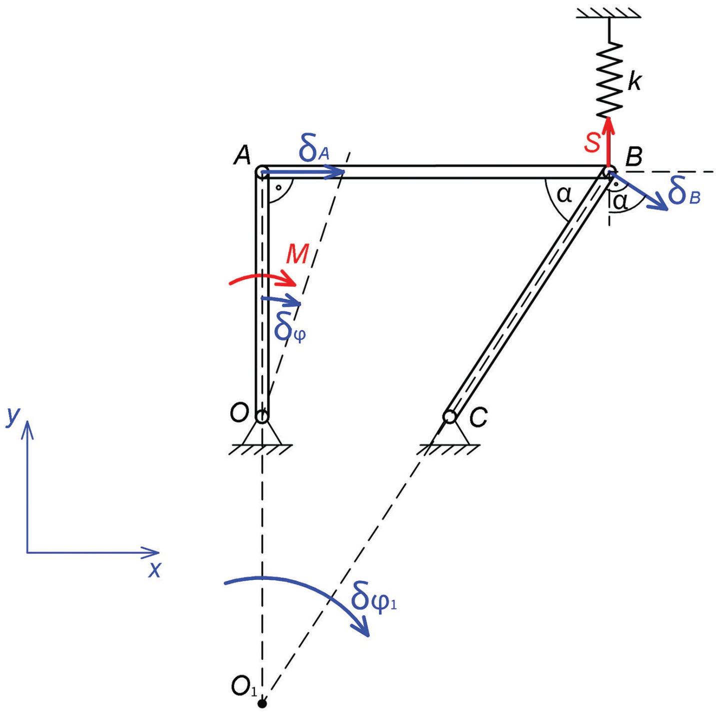
Na rysunku 2.11 przedstawiono mechanizm dwukorbowy składający się z trzech jednorodnych prętów o długościach: $|OA| = l$, $|AB| = 1{,}5l$, $|BC| = 1{,}2l$. Mechanizm wprawiany jest w ruch za pomocą znanego momentu M przyłożonego do korby OA. W punkcie B do mechanizmu dołączono sprężynę o sztywności k. Znajdź odkształcenie sprężyny h tak, aby ten mechanizm pozostał w równowadze. Kąt α przyjmij jako dany.



Rys. 2.11. Mechanizm do zadania 2.11

Rozwiązanie:

Zaznaczymy na rysunku przemieszczenia przygotowane oraz chwilowe środki obrotu.



Rys. 2.11a

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{M} \cdot \delta\varphi + \boldsymbol{S} \cdot \delta_B = 0$$

$$\delta L = M\delta\varphi + (0, S) \cdot (\delta_B \sin\alpha, -\delta_B \cos\alpha) = 0$$

$$M\delta\varphi - S\delta_B \cos\alpha = 0$$

Wiedząc, że chwilowy środek obrotu pręta OA znajduje się w punkcie O, możemy zapisać przemieszczenie δ_A jako:

$$\delta_A = |\mathrm{OA}|\delta\varphi = 1\delta\varphi$$

Chwilowy środek obrotu dla pręta AB znajduje się w punkcie O_1, zatem wyznaczmy pozostałe długości boków trójkąta ABO_1:

$$|\mathrm{BO}_1| = \frac{1,5l}{\cos\alpha}$$

$$|\mathrm{AO}_1| = 1,5l \,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie O_1, możemy zapisać przemieszczenie δ_A następująco:

$$\delta_A = |AO_1|\delta\varphi_1 = 1,5l\text{tg}\alpha\delta\varphi_1$$

Porównując z wcześniej obliczonym δ_A, otrzymujemy:

$$l\delta\varphi = 1,5l\text{tg}\alpha\delta\varphi$$

Z powyższego równania wyznaczymy wartość $\delta\varphi_1$:

$$\delta\varphi_1 = \frac{2\delta\varphi}{3\text{tg}\alpha}$$

Przemieszczenie punktu B możemy zapisać jako:

$$\delta_B = |BO_1|\delta\varphi_1 = \frac{1,5l}{\cos\alpha}\delta\varphi_1$$

Podstawiając za $\delta\varphi_1$ wyliczoną wcześniej wartość, otrzymujemy:

$$\delta_B = \frac{l}{\sin\alpha}\delta\varphi$$

Wstawiając powyższą zależność do zasady prac przygotowanych, otrzymujemy:

$$M\delta\varphi - S\cos\alpha\frac{l}{\sin\alpha}\delta\varphi = 0$$

$$\left(M - Sl\text{ctg}\alpha\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$, wyznaczymy wartość siły S:

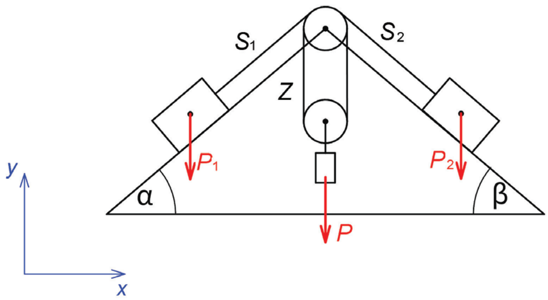
$$S = \frac{M}{l\text{ctg}\alpha}$$

Siłę S możemy zapisać również jako $S = kh$, porównując te dwa wzory, otrzymujemy odkształcenie sprężyny równe:

$$h = \frac{M}{kl\text{ctg}\alpha}$$

Zadanie 2.12.

Ciężar zawieszony na ruchomym krążku podtrzymuje ciężary klocków P_1 i P_2 znajdujących się na dwustronnej równi nachylonej do płaszczyzny odpowiednio pod kątem α i β. Ciężary te są połączone za pomocą wspólnego bezmasowego bloczka, jak pokazano na rys. 2.12. Znaleźć wartość ciężarów P_1 i P_2, tak aby układ był w równowadze. Pominąć tarcie i masy lin i krążków.



Rys. 2.12. Mechanizm do zadania 2.12

Rozwiązanie:

Układ przedstawiony na rys. 2.12 możemy opisać za pomocą trzech współrzędnych: z, s_1, s_2, możemy też zapisać jedno równanie więzu, zatem układ będzie posiadał dwa stopnie swobody. Długości linek łączących te ciała są stałe, więc równanie więzu ma postać:

$$s_1 + s_2 + 2z = \text{const}$$

Po zróżniczkowaniu stronami, możemy δz wyrazić za pomocą δs_1 i δs_2:

$$\delta s_1 + \delta s_2 + 2\delta z = 0$$

$$\delta z = -\frac{\delta s_1 + \delta s_2}{2}$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = 0$$

$$\delta L = \boldsymbol{P}_1 \cdot \delta \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{P}_2 \cdot \delta \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{z}$$

$$P_1 \sin\alpha \delta s_1 + P_2 \sin\beta \delta s_2 + P\delta z = 0$$

Podstawiając za $\delta z = -\frac{\delta s_1 + \delta s_2}{2}$, otrzymujemy:

$$P_1 \sin\alpha \delta s_1 + P_2 \sin\beta \delta s_2 - P\frac{\delta s_1 + \delta s_2}{2} = 0$$

$$\left(P_1 \sin\alpha - \frac{P}{2}\right)\delta s_1 + \left(P_2 \sin\beta - \frac{P}{2}\right)\delta s_2 = 0$$

Przemieszczenia przygotowane δs_1 i δs_2 są różne od zera, zatem równe zero są wartości w nawiasach, czyli siły uogólnione:

$$P_1 \sin\alpha - \frac{P}{2} = 0$$

$$P_2 \sin\beta - \frac{P}{2} = 0$$

zatem:

$$P_1 = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

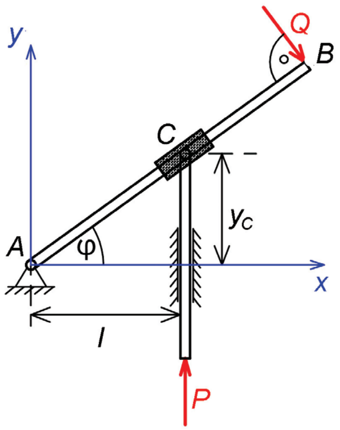
$$P_2 = \frac{P}{2\sin\beta}$$

Układ pozostaje w równowadze, gdy wartości ciężarów są równe odpowiednio:

$$P_1 = \frac{P}{2\sin\alpha} \quad \text{i} \quad P_2 = \frac{P}{2\sin\beta}$$

Zadanie 2.13.

Dany jest mechanizm działania wahacza przedstawiony na rys. 2.13 obracającego się dookoła poziomej osi przechodzącej przez punkt A. Przesuwający się suwak wprawia w ruch pionową belkę, która jest oddalona od początku układu współrzędnych o l. Wyznaczyć siłę Q jaką należy przyłożyć prostopadle w punkcie B, aby zrównoważyć siłę P, przyłożoną do pionowego pręta. Dana jest długość wahacza $|AB| = R$.



Rys. 2.13. Mechanizm do zadania 2.13

Rozwiązanie:

Układ ma jeden stopień swobody, zatem wprowadzamy jedną współrzędną uogólnioną φ. Wyrazimy współrzędne punktów przyłożenia sił za pomocą współrzędnej uogólnionej i wyznaczymy przemieszczenia przygotowane. Wiemy, że siłę możemy przesuwać wzdłuż linii jej działania, zatem jako miejsce przyłożenia siły przyjmiemy punkt C.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y_C}{l}$$

$$y_C = l\,\mathrm{tg}\varphi$$

$$\delta y_C = \frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi$$

$$x_B = R\cos\varphi \qquad y_B = R\sin\varphi$$

$$\delta x_B = -R\sin\varphi\delta\varphi \qquad \delta y_B = R\cos\varphi\,\delta\varphi$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\delta_C} + \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\delta_B} = 0$$

$$(0,P)\cdot(\delta x_C,\delta y_c) + (Q\sin\varphi,-Q\cos\varphi)\cdot(\delta x_B,\delta y_B) = 0$$

Podstawiamy za przemieszczenia przygotowane i otrzymujemy:

$$(0,P)\cdot\left(0,\frac{l}{\cos^2\varphi}\right) + (Q\sin\varphi,-Q\cos\varphi)\cdot(-R\sin\varphi\delta\varphi, R\cos\varphi\delta\varphi) = 0$$

$$\left(P\frac{l}{\cos^2\varphi} - QR\sin^2\varphi - QR\cos^2\varphi\right)\delta\varphi = 0$$

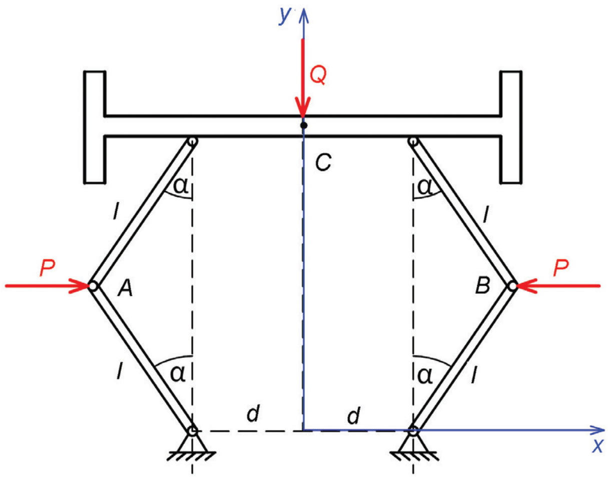
Wiemy, że $\delta\varphi \neq 0$, zatem:

$$P\frac{l}{\cos^2\varphi} - QR = 0$$

$$Q = \frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$$

Zadanie 2.14.

Prasa przedstawiona na rys. 2.14 składa się z czterech jednakowych prętów o długości l, zamocowanych w odległości $2d$. W przegubach A i B przyłożono znaną siłę P. Tarcie i ciężary prętów pominąć. Wyznaczyć wartość siły Q, aby prasa była w równowadze.



Rys. 2.14. Mechanizm do zadania 2.14

Rozwiązanie:
Układ ma jeden stopień swobody, zatem wprowadzamy jedną współrzędną uogólnioną α i za jej pomocą wyznaczymy przemieszczenia przygotowane poszczególnych punktów. Schemat prasy przedstawionej w zadaniu jest symetryczny, zatem wprowadźmy układ współrzędnych zawierający oś symetrii.

Wyznaczymy współrzędne punktów, w których przyłożone są siły. Widzimy, że punkty A i B są symetryczne, zatem:

$$x_A = -x_B = -d - l\sin\alpha$$
$$y_A = y_B = l\cos\alpha$$
$$x_B = d + l\sin\alpha$$

Współrzędne punktu C:

$$x_C = 0$$

$$y_C = 2l \cos \alpha$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{C}} = 0$$

$$\delta L = (P,0)\cdot(\delta x_A, \delta y_A) + (-P,0)\cdot(\delta x_B, \delta y_B) + (0,-Q)\cdot(\delta x_C, \delta y_C) = 0$$

$$P\delta x_A - P\delta x_B - Q\delta y_C = 0$$

Wyznaczymy potrzebne przemieszczenia przygotowane:

$$\delta x_A = -l\cos\alpha\delta\alpha$$
$$\delta x_B = l\cos\alpha\delta\alpha$$
$$\delta y_C = -2l\sin\alpha\delta\alpha$$

Podstawiamy za przemieszczenia przygotowane i otrzymujemy:

$$-Pl\cos\alpha\delta\alpha - Pl\cos\alpha\delta\alpha + Q2l\sin\alpha\delta\alpha = 0$$

$$\left(-2Pl\cos\alpha + Q2l\sin\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

Wiedząc, że $\delta\alpha \neq 0$, przyrównujemy do zera siłę uogólnioną:

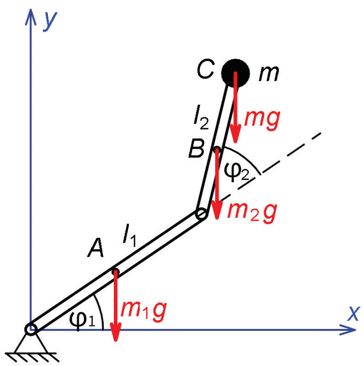
$$-2Pl\cos\alpha + Q2l\sin\alpha = 0$$

Po przekształceniu szukana wartość siły Q jest równa:

$$Q = P\ \mathrm{ctg}\ \alpha$$

Zadanie 2.15.

Dany jest planarny manipulator 2D przedstawiony na rys. 2.15 o ramionach o długości l_1 i l_2 i masach odpowiednio m_1 i m_2. Przedmiot manipulacji ma masę m. Wyznaczyć siły uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym.



Rys. 2.15. Mechanizm do zadania 2.15

Rozwiązanie:

Układ ma dwa stopnie swobody, zatem wprowadzamy dwie współrzędne uogólnione φ_1 i φ_2 i za ich pomocą wyznaczymy przemieszczenia przygotowane punktów A, B i C.

Najpierw wyznaczymy współrzędne punktów, w których przyłożone są siły.

$$x_A = \frac{l_1}{2}\cos\varphi_1 \qquad y_A = \frac{l_1}{2}\sin\varphi_1$$

$$x_B = l_1\cos\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2) \qquad y_B = l_1\sin\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$x_C = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos(\varphi_1+\varphi_2) \qquad y_C = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, mamy:

$$\delta L = \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{C}} = 0$$

$$(0,-m_1 g)\cdot(\delta x_A,\delta y_A) + (0,-m_1 g)\cdot(\delta x_B,\delta y_B) + (0,-mg)\cdot(\delta x_C,\delta y_C) = 0$$

$$-m_1 g\delta y_A - m_2 g\delta y_B - mg\delta y_C = 0$$

Wyznaczymy potrzebne przemieszczenia przygotowane:

$$\delta y_A = \frac{l_1}{2}\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$

$$\delta y_B = l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2)\delta\varphi_1 + \frac{l_2}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2)\delta\varphi_2$$

$$\delta y_C = l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\delta\varphi_1 + l_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\delta\varphi_2$$

Podstawiamy za przemieszczenia przygotowane i otrzymujemy:

$$\left(-\left(\frac{m_1}{2}+m_2+m\right)gl_1\cos\varphi_1 - (m_2+m)gl_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right)\delta\varphi_1$$
$$+\left(-(m_2+m)gl_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right)\delta\varphi_2 = 0$$

Siły uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym φ_1 i φ_2 są równe:

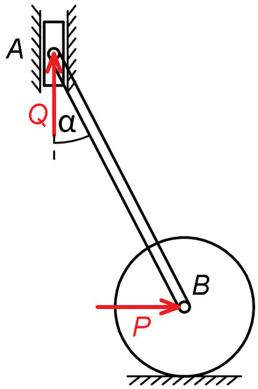
$$Q_{\varphi_1} = -\left(\frac{m_1}{2}+m_2+m\right)gl_1\cos\varphi_1 - (m_2+m)gl_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$Q_{\varphi_2} = -(m_2+m)gl_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

W powyższych zadaniach korzystaliśmy albo z chwilowego środka obrotu, albo z rzutu prędkości na wspólną oś. Można też obliczyć te zależności z zasady tworzenia ruchu płaskiego jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego.

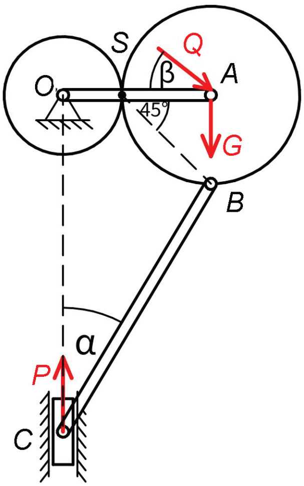
2.8. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 2.16.
Koło toczące się bez poślizgu po gładkiej powierzchni wprawia w ruch wodzik AB, jak pokazano na rys. 2.16. Do środka koła przyłożona jest siła P. Jaką siłę Q należy przyłożyć w punkcie A, aby układ pozostał w równowadze? Kąt α jest dany. Ciężary i tarcie zaniedbać.



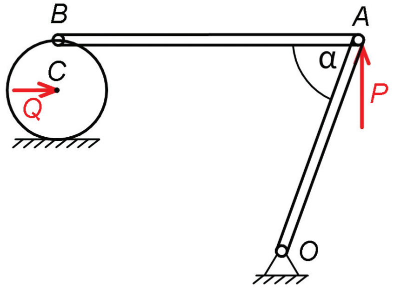
Rys. 2.16. Mechanizm do zadania 2.16

Zadanie 2.17.
Dwa krążki, z których jeden zamocowany jest na podporze stałej przegubowej, są połączone prętem. Do większego krążka w punkcie B zamocowano jarzmo, jak pokazano na rys. 2.17. Jaką siłę P należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze? Ciężary prętów zaniedbać.



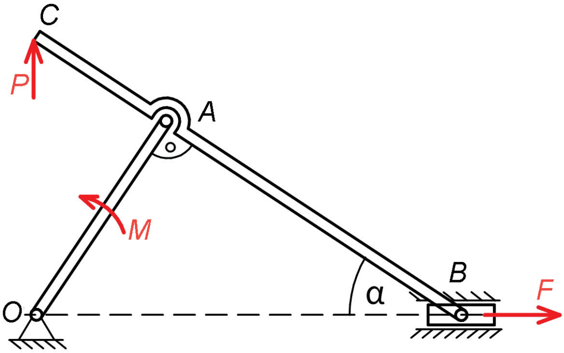
Rys. 2.17. Mechanizm do zadania 2.17

Zadanie 2.18.
Do korby OA zamocowano pod kątem poziomy pręt AB, który połączony jest przegubowo z walcem o środku C, jak na rys. 2.18. Do końca korby przyłożono pionową siłę P. Zaniedbując siły ciężkości i tarcie, wyznaczyć jaką wartość siły Q należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze?



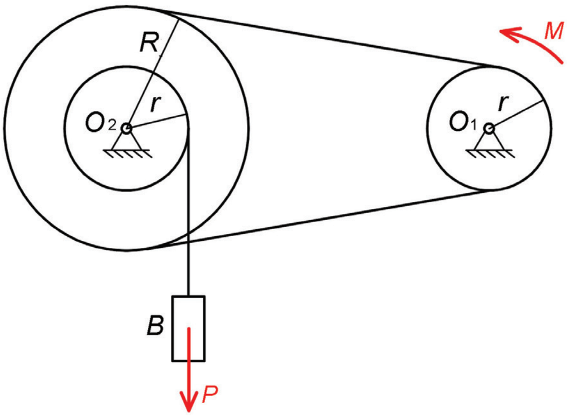
Rys. 2.18. Mechanizm do zadania 2.18

Zadanie 2.19.
Do mechanizmu składającego się z dwóch jednorodnych prętów o długościach: $|OA| = 2l$, $|AB| = 3l$, $|CA| = l$ oraz suwaka B przedstawionego na rys. 2.19 w punkcie C przyłożono siłę P. Mechanizm wprawiany jest w ruch za pomocą momentu M przyłożonego do korby OA. Jaką siłę F należy przyłożyć do suwaka, aby mechanizm pozostał w równowadze? Kąt przyjmij jako dany. Siły ciężkości zaniedbać.



Rys. 2.19. Mechanizm do zadania 2.19

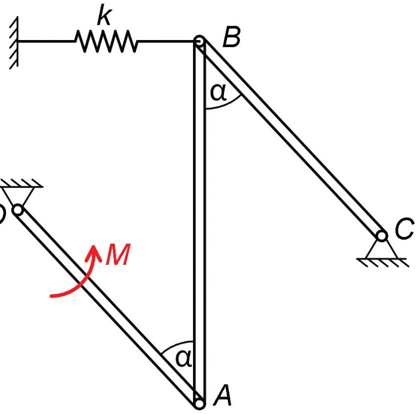
Zadanie 2.20.
Mechanizm przedstawiony na rys. 2.20 wprawiany jest w ruch za pomocą momentu M przyłożonego do krążka o środku O_1 i promieniu r. Jak duży ciężar P należy zawiesić na lince nawiniętej na mniejszy krążek współśrodkowy o promieniu r i środku O_2, aby układ pozostał w równowadze? Promień większego krążka o środku O_1 wynosi R. Założyć, że nie występuje poślizg między linami a krążkami.



Rys. 2.20. Mechanizm do zadania 2.20

Zadanie 2.21.

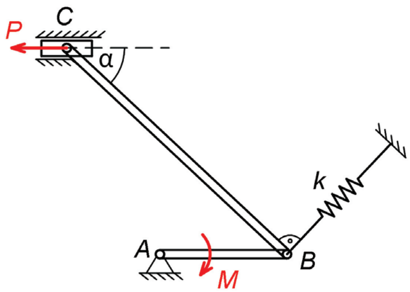
Na rysunku 2.21 przedstawiono mechanizm dwukorbowy. Mechanizm wprawiany jest w ruch za pomocą momentu przyłożonego do korby OA. Do końca korby BC zamocowano sprężynę o sztywności k. Pomijając ciężary tych prętów, znajdź odkształcenie sprężyny h tak, aby układ pozostał w równowadze. Kąt α przyjmij jako dany. Długości korb są takie same i wynoszą |OA| = |AB| = d, długość pręta AB wynosi.



Rys. 2.21. Mechanizm do zadania 2.21

Zadanie 2.22.

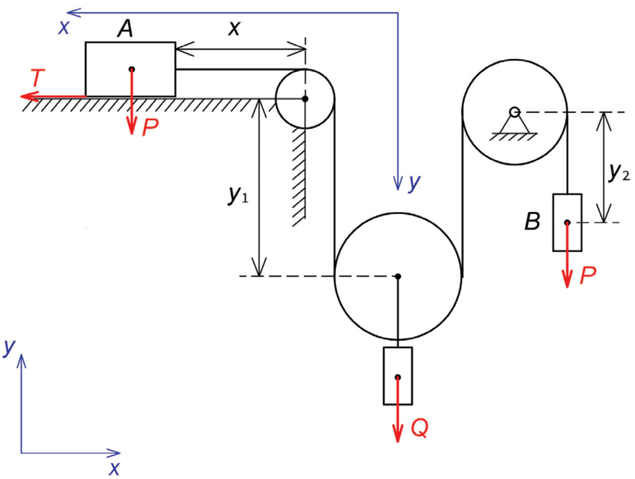
W mechanizmie przedstawionym na rys. 2.22 do korby AB o długości l przyłożono moment M. Koniec korby połączony jest z jarzmem BC o długości $3l$ oraz sprężyna o sztywności k. Odkształcenie sprężyny wynosi h, dany jest kąt α. Znajdź wartość siły P, jaką należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze. Ciężary prętów zaniedbać.



Rys. 2.22. Mechanizm do zadania 2.22

Zadanie 2.23.

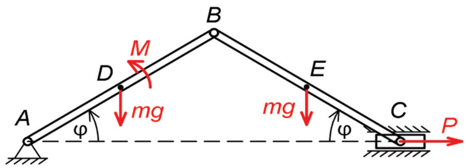
Do końców nieważkiej i nierozciągliwej nici przywiązano dwa ciała o ciężarze P, z których jedno jest zawieszone na nitce przełożonej przez nieruchomy blok, a drugie znajduje się na poziomej płaszczyźnie. Linka opasa jeszcze ruchomy blok, do którego przywiązano ciężar Q, jak na rys. 2.23. Jak duży musi być współczynnik tarcia i jak duży musi być ciężar Q, aby układ pozostał jeszcze w równowadze?



Rys. 2.23. Mechanizm do zadania 2.23

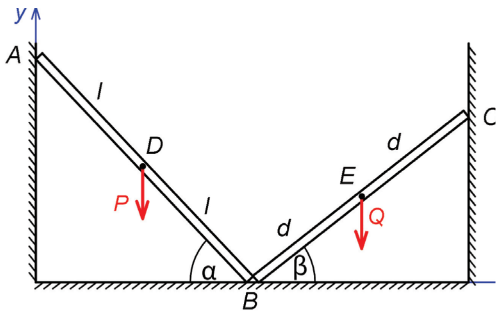
Zadanie 2.24.

W mechanizmie przedstawionym na rys. 2.24 składającym się z dwóch prętów o tej samej masie i długości przyłożono do korby AB moment . Jaką siłę należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze?



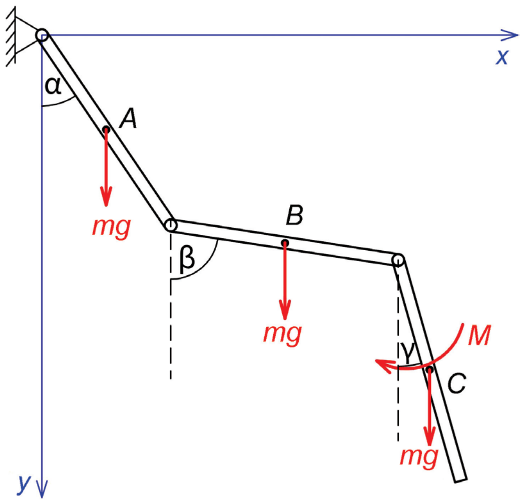
Rys. 2.24. Mechanizm do zadania 2.24

Zadanie 2.25.
Na rysunku 2.25 przedstawiono dwa jednorodne pręty o ciężarach odpowiednio P i Q opierające się o gładkie ściany w punktach A i C oraz o gładką powierzchnię w punkcie B. Długość pręta AB wynosi $2l$ a pręta BC $2d$. Jaki musi być stosunek tych ciężarów, aby układ pozostał w położeniu równowagi?



Rys. 2.25. Mechanizm do zadania 2.25

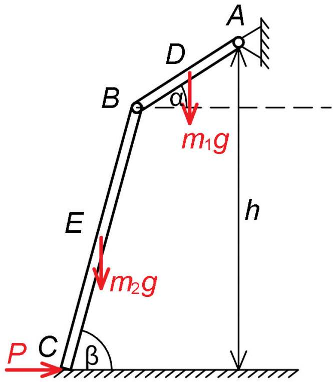
Zadanie 2.26.
Trzy jednorodne pręty o środkach odpowiednio w punktach A, B, C, jednakowej długości $2d$ i masie m połączone są w ten sposób, że tworzą potrójne wahadło. Do ostatniego pręta przyłożono moment M, jak na rys. 2.26. Wyznaczyć siły uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym α, β, γ.



Rys. 2.26. Mechanizm do zadania 2.26

Zadanie 2.27.
Dwa jednorodne pręty o środkach odpowiednio w punktach D i E, o długościach: $|AB| = 2d$, $|BC| = 4d$ i masach odpowiednio m_1 i m_2 połączone są jak pokazano na

rys. 2.27. Wysokość, na jakiej zamocowana jest podpora stała przegubowa, znajduje się na wysokości *h* od podłoża. Zakładając brak tarcia, wyznaczyć jaką siłę należy przyłożyć w punkcie C, aby układ pozostał w równowadze.



Rys. 2.27 Mechanizm do zadania 2.27

III. OGÓLNE RÓWNANIE DYNAMIKI ANALITYCZNEJ

3.1. OGÓLNE RÓWNANIE DYNAMIKI ANALITYCZNEJ

Korzystając z zasady d'Alemberta, można każde zagadnienie dynamiki sprowadzić do zagadnienia równowagi sił rzeczywistych działających na punkty materialne i sił bezwładności tych punktów. W przypadku więzów idealnych wystarczy rozpatrzyć tylko siły zewnętrzne działające na punkty i siły bezwładności, ponieważ ich praca przygotowana jest niezerowa.

Niech $\boldsymbol{P_i}$ będzie wypadkową sił czynnych działających na punkt materialny A_i, $\boldsymbol{a_i}$ – przyspieszeniem, a $\delta\boldsymbol{r_i}$ przemieszczeniem przygotowanym tego punktu. Dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego musi być spełnione równanie:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_i}-m_i\boldsymbol{a_i}\right)\cdot\boldsymbol{r_i}=0 \tag{3.1.}$$

Wiedząc, że $\boldsymbol{a_i}=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$, gdzie $\boldsymbol{r_i}$ jest wektorem promieniem punktu A_i powyższe równanie możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_i}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)\cdot\mathbf{r_i}=0 \tag{3.2.}$$

Dla nieswobodnego układu materialnego o więzach idealnych suma prac przygotowanych sił czynnych $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_n}$ oraz sił bezwładności $-m_1\boldsymbol{a_1}, -m_2\boldsymbol{a_2}, \ldots, -m_n\boldsymbol{a_n}$ na dowolnym przemieszczeniu przygotowanym tego układu jest równa zero.

W prostokątnym układzie współrzędnych niech punkt $A_i(x_i, y_i, z_i)$, a siła $\boldsymbol{P_i}(P_{ix}, P_{iy}, P_{iz})$, wówczas ogólne równanie dynamiki analitycznej możemy zapisać następująco:

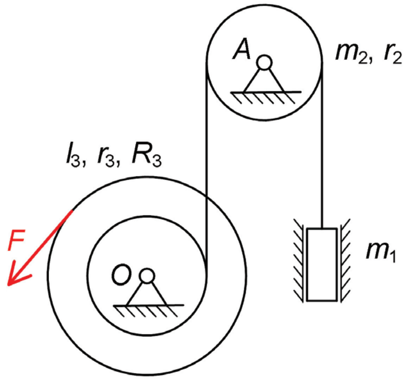
$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\left(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i\right)\cdot x_i+\left(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i\right)\cdot y_i+\left(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i\right)\cdot z_i\Big)=0 \tag{3.3.}$$

3.2. ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

W zadaniach w tym rozdziale pomijamy tarcie oraz siłę tarcia zapewniającą toczenie.

Zadanie 3.1.

Układ materialny przedstawiony na rys. 3.1 złożony jest z dwóch współśrodkowych krążków o środku O, momencie bezwładności I_3 oraz promieniach r_3, R_3, do którego jest przyłożona siła F. Krążek ten połączony jest z drugim krążkiem o środku A, masie m_2 i promieniu r_2, do którego jest zamocowany bloczek o masie m_1. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwej, nieważkiej nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenie masy .

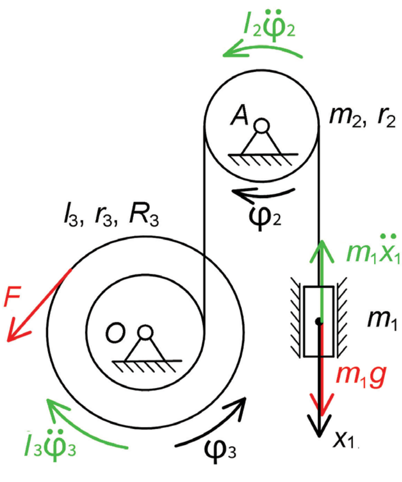


Rys. 3.1. Mechanizm do zadania 3.1

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 3.1 ma jeden stopień swobody. Krążki o środkach O i A wykonują ruch obrotowy, a masa porusza się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu kąty obrotu φ_2 i φ_3 oraz przemieszczenie masy m_1 jako x_1. Na układ działają siły ciężkości i dana siła F. Zaznaczamy również siłę bezładności dla ciała o masie m_1, natomiast dla krążków siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających odpowiednio moment $I_2\ddot{\varphi}_2$ oraz $I_3\ddot{\varphi}_3$.



Rys. 3.1a

Zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki:

$$x_1 = r_2\varphi_2$$

$$r_2\varphi_2 = r_3\varphi_3$$

Policzymy wariacje:

$$\delta x_1 = r_2\delta\varphi_2$$

$$r_2\delta\varphi_2 = r_3\delta\varphi_2$$

zatem:

$$\delta\varphi_3 = \frac{r_2}{r_3}\delta\varphi_2$$

Z kolei różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = r_2\ddot{\varphi}_2$$

$$r_2\ddot{\varphi}_2 = r_3\ddot{\varphi}_3$$

zatem:

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{r_2}{r_3}\ddot{\varphi}_2$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\left(m_1 g - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(FR_3 - I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 = 0$$

Podstawiając wyliczone wcześniej zależności z równań więzów, uzależnimy wszystkie wariacje od $\delta\varphi_2$ oraz wszystkie przyspieszenia od $\ddot{\varphi}_2$.

$$\left(m_1 g - m_1 r_2\ddot{\varphi}_2\right)r_2\delta\varphi_2 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(FR_3 - I_3\frac{r_2}{r_3}\ddot{\varphi}\frac{1}{n_2}\right)\frac{r_2}{r_3}\delta\varphi_2 = 0$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi_2$, otrzymujemy:

$$\left(m_1 g r_2 - m_1 r_2^2\ddot{\varphi}_2 - I_2\ddot{\varphi}_2 + FR_3\frac{r_2}{r_3} - I_3\frac{r_2^2}{r_3^2}\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 = 0$$

Wiemy, że $\delta\varphi_2 \neq 0$, zatem:

$$m_1 g r_2 - m_1 r_2^2\ddot{\varphi}_2 - I_2\ddot{\varphi}_2 + FR_3\frac{r_2}{r_3} - I_3\frac{r_2^2}{r_3^2}\ddot{\varphi}_2 = 0$$

Powyższe równanie ma tylko jedną niewiadomą $\ddot{\varphi}_2$, zatem możemy ją wyliczyć:

$$\left(m_1 r_2^2 + I_2 + I_3 \frac{r_2^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_2 = m_1 g r_2 + F R_3 \frac{r_2}{r_3}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 g r_2 + F R_3 \frac{r_2}{r_3}}{m_1 r_2^2 + I_2 + I_3 \frac{r_2^2}{r_3^2}}$$

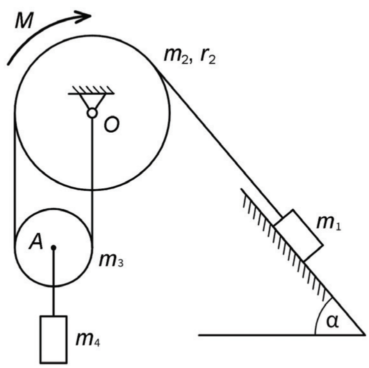
Znając przyspieszenie $\ddot{\varphi}_2$ oraz wstawiając je do wzorów na $\ddot{\varphi}_3$ i $\ddot{\varphi}_1$, wyliczymy pozostałe przyspieszenia:

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{r_2}{r_3}\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 g r_2^2 + F R_3 \frac{r_2^2}{r_3}}{m_1 r_2^2 r_3 + I_2 r_3 + I_3 \frac{r_2^2}{r_3}}$$

$$\ddot{x}_1 = r_2 \ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 g r_2^2 + F R_3 \frac{r_2^2}{r_3}}{m_1 r_2^2 + I_2 + I_3 \frac{r_2^2}{r_3^2}}$$

Zadanie 3.2.

Układ materialny przedstawiony na rys. 3.2 złożony jest z krążka o środku O, o masie i promieniu r_2, do którego przyłożono moment M. Krążek ten jest połączony za pomocą nieważkich nierozciągliwych nici z masą m_1 znajdującą się na równi pochyłej o kącie nachylenia oraz z drugim krążkiem o środku A, masie m_3 i promieniu r_3, do którego jest zawieszony bloczek o masie m_4. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenie masy m_1 oraz m_4.

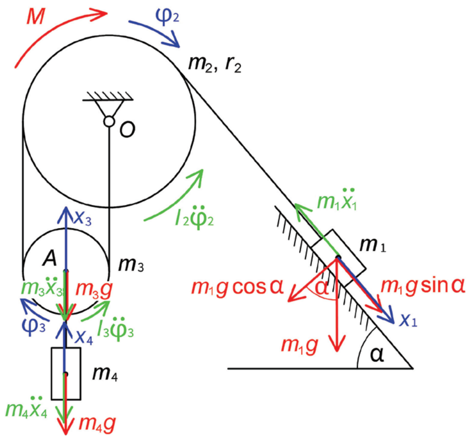


Rys. 3.2. Mechanizm do zadania 3.2

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 3.2 ma jeden stopień swobody. Krążek o środku O wykonuje ruch obrotowy, a krążek o środku A wykonuje ruch płaski. Masy m_1 i m_4 poruszają się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu kąty obrotu φ_2 i φ_3 oraz przemieszczenia odpowiednio masy m_1 jako x_1, masy m_3 jako x_3, masy m_4 jako x_4. Na układ działają siły ciężkości. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciał o masach m_1 i m_4, natomiast dla krążka wykonującego ruch obrotowy siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających moment $I_2\ddot{\varphi}_2$, a dla krążka wykonującego ruch plaski siła bezwładności sprowadza się do siły $m_3\ddot{x}_3$ oraz pary sił o momencie $I_3\ddot{\varphi}_3$.



Rys. 3.2a

Zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki:

$$x_1 = r_2\varphi_2$$

$$r_2\varphi_2 = 2r_3\varphi_3 = r_2\varphi_3 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_3$$

$$x_3 = \frac{r_2}{2}\varphi_3$$

$$x_3 = x_4$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne:

$$\delta x_1 = r_2\delta\varphi_2 = r_2\delta\varphi_3$$

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3$$

$$\delta x_3 = \frac{r_2}{2}\delta\varphi_3$$

$$\text{ä}x_3 = \text{ä}x_4$$

Z kolei różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = r_2\ddot{\varphi}_2 = r_2\ddot{\varphi}_3$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{r_2}{2}\ddot{\varphi}_3$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_4$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-m_3 g - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3\\&+\left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(-m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0\end{aligned}$$

Momenty bezwładności krążków są równe:

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2$$

$$I_3 = \frac{1}{2}m_3 r_3^2 = \frac{1}{8}m_3 r_2^2$$

Podstawiając wyliczone wartości momentów bezwładności oraz zależności z równań więzów, uzależnimy wszystkie wariacje od $\delta\varphi_3$ oraz wszystkie przyspieszenia od $\ddot{\varphi}_3$.

$$\begin{aligned}&\left(m_1 g\sin\alpha - m_1 r_2\ddot{\varphi}_3\right)r_2\delta\varphi_3 + \left(M - \frac{1}{2}m_2 r_2^2\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3\\&+\left(-m_3 g - m_3\frac{r_2}{2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{r_2}{2}\delta\varphi_3 + \left(-\frac{1}{8}m_3 r_2^2\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3\\&+\left(-m_4 g - m_4\frac{r_2}{2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{r_2}{2}\delta\varphi_3 = 0\end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi_3$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(m_1 g r_2\sin\alpha - m_1 r_2^2\ddot{\varphi}_3 + M - \frac{1}{2}m_2 r_2^2\ddot{\varphi}_3 - m_3 g\frac{r_2}{2} - m_3\frac{r_2^2}{4}\ddot{\varphi}_3\right.\\&\left.-\frac{1}{8}m_3 r_2^2\ddot{\varphi}_3 - m_4 g\frac{r_2}{2} - m_4\frac{r_2^2}{4}\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 = 0\end{aligned}$$

Wiemy, że $\delta\varphi_3 \neq 0$, zatem:

$$m_1 g r_2 \sin\alpha - m_1 r_2^2 \ddot{\varphi}_3 + M - \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_3 - m_3 g \frac{r_2}{2} - m_3 \frac{r_2^2}{4} \ddot{\varphi}_3$$
$$-\frac{1}{8} m_3 r_2^2 \ddot{\varphi}_3 - m_4 g \frac{r_2}{2} - m_4 \frac{r_2^2}{4} \ddot{\varphi}_3 = 0$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\frac{r_2^2}{8}\left(8m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4\right)\ddot{\varphi}_3 = M + \frac{g r_2}{2}\left(2m_1 \sin\alpha - m_3 - m_4\right)$$

Zatem przyspieszenie $\ddot{\varphi}_3$ jest równe:

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{M + \frac{g r_2}{2}\left(2m_1 \sin\alpha - m_3 - m_4\right)}{\frac{r_2^2}{8}\left(8m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4\right)}$$

Znając wartość przyspieszenia $\ddot{\varphi}_3$ oraz wiedząc, że $\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3$, wyliczamy pozostałe przyspieszenia:

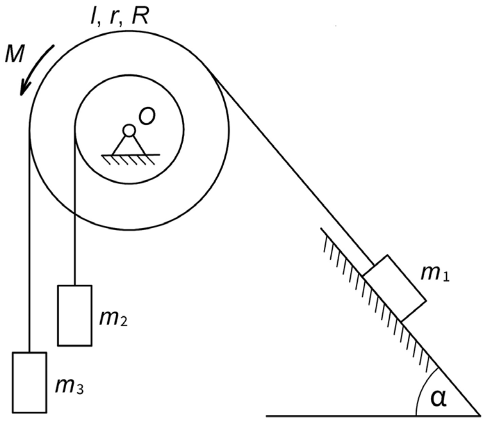
$$\ddot{x}_1 = r_2 \ddot{\varphi}_2 = \frac{8M + 4 g r_2\left(2m_1 \sin\alpha - m_3 - m_4\right)}{r_2\left(8m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4\right)}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{r_2}{2}\ddot{\varphi}_3 = \frac{4M + 2 g r_2\left(2m_1 \sin\alpha - m_3 - m_4\right)}{r_2\left(8m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4\right)}$$

$$\ddot{x}_4 = \ddot{x}_3$$

Zadanie 3.3.

Układ ciał materialny przedstawiony na rys. 3.3 złożony jest z dwóch współśrodkowych krążków o środku O, momencie bezwładności *I* i promieniu wewnętrznym *r* i zewnętrznym *R*, do którego przyłożono moment *M*. Krążek ten jest połączony za pomocą nieważkich nierozciągliwych nici z masą m_1 znajdującą się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α oraz z zawieszonymi bloczkami o masach m_2 i m_3. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_1, m_2, m_3 oraz przyspieszenie kątowe krążka.

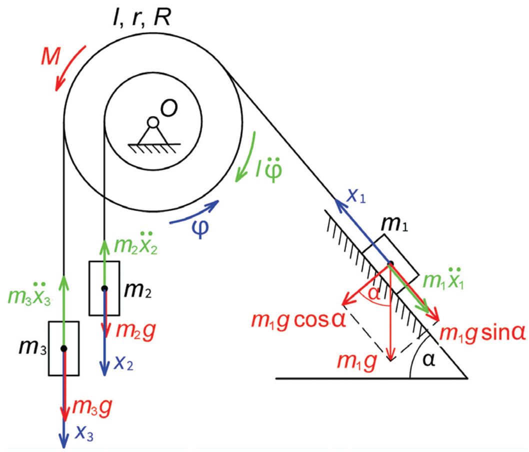


Rys. 3.3. Mechanizm do zadania 3.3

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 3.3 ma jeden stopień swobody. Krążek o środku O wykonuje ruch obrotowy, a masy m_1, m_2 i m_3 poruszają się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu kąt obrotu oraz przemieszczenia odpowiednio masy m_1 jako x_1, masy m_2 jako x_2, masy m_3 jako x_3. Na układ działa siła zewnętrzna – siły ciężkości. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciał o masach m_1, m_2 i m_3. Dla krążka siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających moment $I\ddot{\varphi}$.



Rys. 3.3a.

Zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki:

$$x_1 = \varphi R = x_3$$

$$x_2 = \varphi r$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne:

$$\delta x_1 = R\delta\varphi = \delta x_3$$

$$\delta x_2 = r\delta\varphi$$

Z kolei różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi} = \ddot{x}_3$$

$$\ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi}$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\left(-m_1 g \sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi + \left(m_2 g - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2$$
$$+\left(m_3 g - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 = 0$$

Podstawiając wyliczone zależności z równań więzów, uzależnimy wszystkie wariacje od $\delta\varphi$ oraz wszystkie przyspieszenia od $\ddot{\varphi}$.

$$\left(-m_1 g \sin\alpha - m_1 R\ddot{\varphi}\right)R\delta\varphi + \left(M - I\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi + \left(m_2 g - m_2 r\ddot{\varphi}\right)r\delta\varphi$$
$$+\left(m_3 g - m_3 R\ddot{\varphi}\right)R\delta\varphi = 0$$

Wyciągając przed nawias, otrzymujemy:

$$\left(-m_1 gR\sin\alpha - m_1R^2\ddot{\varphi} + M - I\ddot{\varphi} + m_2 gr - m_2 r^2\ddot{\varphi} + m_3 gR - m_3R^2\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$, zatem:

$$-m_1 gR\sin\alpha - m_1R^2\ddot{\varphi} + M - I\ddot{\varphi} + m_2 gr - m_2 r^2\ddot{\varphi} + m_3 gR - m_3R^2\ddot{\varphi} = 0$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\left(m_1R^2 + I + m_2r^2 + m_3R^2\right)\ddot{\varphi} = M - m_1 gR\sin\alpha + m_2 gr + m_3 gR$$

Zatem przyspieszenie kątowe krążka $\ddot{\varphi}$ jest równe:

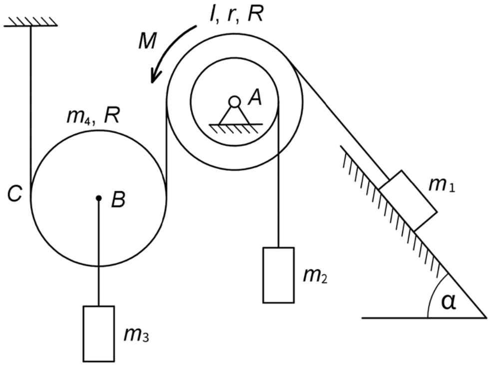
$$\ddot{\varphi} = \frac{M - m_1 gR\sin\alpha + m_2 gr + m_3 gR}{m_1R^2 + I + m_2r^2 + m_3R^2}$$

Znając $\ddot{\varphi}$ oraz wiedząc, że $\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi} = \ddot{x}_3$ i $\ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi}$, wyznaczamy pozostałe wartości przyspieszeń:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 = R\ddot{\varphi} = \frac{R\left(M - m_1 gR\sin\alpha + m_2 gr + m_3 gR\right)}{m_1R^2 + I + m_2r^2 + m_3R^2}$$

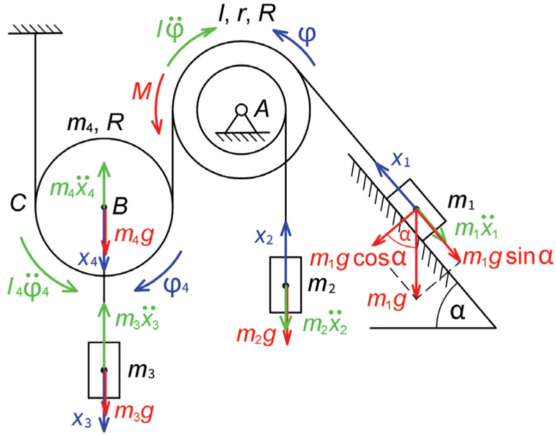
$$\ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi} = \frac{r\left(M - m_1 gR\sin\alpha + m_2 gr + m_3 gR\right)}{m_1R^2 + I + m_2r^2 + m_3R^2}$$

Zadanie 3.4.
Układ materialny przedstawiony na rys. 3.4 złożony jest ze współśrodkowego krążka o środku A, momencie bezwładności I, promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R, do którego przyłożono moment M. Krążek ten jest połączony z masą m_1 znajdującą się na równi pochyłej o kącie nachylenia α i drugim krążkiem o środku B, masie m_4, promieniu R oraz z masą m_2. Do krążka o środku B dołączona jest masa m_3. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_1, m_2, m_3, m_4 oraz przyspieszenia kątowe krążków.



Rys. 3.4. Mechanizm do zadania 3.4

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 3.4 ma jeden stopień swobody. Krążek o środku A wykonuje ruch obrotowy, krążek o środku B ruch płaski, a masy m_1, m_2 i m_3, poruszają się ruchem postępowym.



Rys. 3.4a

Zaznaczymy na schemacie naszego układu dla krążka A kąt obrotu φ zgodny z przyłożonym momentem, dla krążka B kąt obrotu φ_4 i przemieszczenie środka masy x_4 oraz przemieszczenia odpowiednio masy m_1 jako x_1, masy m_2 jako x_2, masy m_3 jako x_3. Na układ działają siły zewnętrzne – siły ciężkości. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciał o masach m_1, m_2 i m_3. Dla krążka A siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających moment $I\ddot{\varphi}$. Dla krążka B mamy siłę bezwładności oraz parę sił dających moment $I_4\ddot{\varphi}_4$.

Zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki (korzystając z chwilowych środków obrotu w punktach A i C):

$$x_1 = \varphi R$$

$$x_2 = \varphi r$$

$$\varphi R = \varphi_4 2R$$

$$x_3 = x_4$$

$$x_4 = \varphi_4 R$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne.

$$\delta x_1 = R\delta\varphi$$

$$\delta x_2 = r\delta\varphi$$

$$R\delta\varphi = 2R\delta\varphi_4$$

$$\delta x_3 = \delta x_4 = R\delta\varphi_4$$

Przyjmiemy współrzędną uogólnioną jako φ_4 i wszystkie przemieszczenia uzależnimy od tej współrzędnej:

$$\delta x_1 = 2R\delta\varphi_4$$

$$\delta x_2 = 2r\delta\varphi_4$$

$$\delta\varphi = 2\delta\varphi_4$$

$$\delta x_3 = \delta x_4 = R\delta\varphi_4$$

Z kolei różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi} = 2R\ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{x}_2 = r\ddot{\varphi} = 2r\ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{\varphi} = 2\ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_4 = \ddot{\varphi}_4 R$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\cdot x_1 + \left(M - I\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi + \left(-m_2 g - m_2\ddot{x}_2\right)\cdot x_2\\&+\left(m_3 g - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 + \left(m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\cdot x_4 + \left(-I_4\ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Moment bezwładności krążka B jest równy:

$$I_4 = \frac{1}{2}m_4 R^2$$

Podstawiamy wyliczone zależności z równań więzów uzależnione od zmiennej uogólnionej φ_4:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1 2R\ddot{\varphi}_4\right)2R\delta\varphi_4 + \left(M - 2I\ddot{\varphi}_4\right)2\delta\varphi_4\\&+\left(-m_2 g - m_2 2r\ddot{\varphi}_4\right)2r\delta\varphi_4 + \left(m_3 g - m_3\ddot{\varphi}_4 R\right)R\delta\varphi_4\\&+\left(m_4 g - m_4\ddot{\varphi}_4 R\right)R\delta\varphi_4 + \left(-\frac{1}{2}m_4 R^2\ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\Big(-2m_1 gR\sin\alpha - 4m_1 R^2\ddot{\varphi}_4 + 2M - 4I\ddot{\varphi}_4 - 2m_2 gr - 4m_2 r^2\ddot{\varphi}_4 + m_3 gR\\&-m_3 R^2\ddot{\varphi}_4 + m_4 gR - m_4 R^2\ddot{\varphi}_4 - \frac{1}{2}m_4 R^2\ddot{\varphi}_4\Big)\delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Wiedząc, że $\delta\varphi_4 \neq 0$, zatem:

$$\begin{aligned}&-2m_1 gR\sin\alpha - 4m_1 R^2\ddot{\varphi}_4 + 2M - 4I\ddot{\varphi}_4 - 2m_2 gr - 4m_2 r^2\ddot{\varphi}_4 + m_3 gR\\&-m_3 R^2\ddot{\varphi}_4 + m_4 gR - m_4 R^2\ddot{\varphi}_4 - \frac{1}{2}m_4 R^2\ddot{\varphi}_4 = 0\end{aligned}$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(4m_1 R^2 + 4I + 4m_2 r^2 + m_3 R^2 + \frac{3}{2}m_4 R^2\right)\ddot{\varphi}_4 =\\&= 2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR\end{aligned}$$

Zatem przyspieszenie kątowe krążka $\ddot{\varphi}_4$ jest równe:

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR}{4m_1R^2 + 4I + 4m_2r^2 + m_3R^2 + \frac{3}{2}m_4R^2}$$

Znając $\ddot{\varphi}_4$, wyznaczamy pozostałe wartości przyspieszeń:

$$\ddot{x}_1 = 2R\ddot{\varphi}_4 = \frac{2R\left(2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR\right)}{4m_1R^2 + 4I + 4m_2r^2 + m_3R^2 + \frac{3}{2}m_4R^2}$$

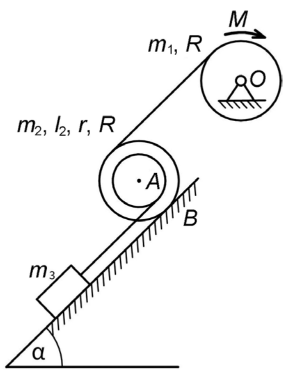
$$\ddot{x}_2 = 2r\ddot{\varphi}_4 = \frac{2r\left(2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR\right)}{4m_1R^2 + 4I + 4m_2r^2 + m_3R^2 + \frac{3}{2}m_4R^2}$$

$$\ddot{\varphi} = 2\ddot{\varphi}_4 = \frac{2\left(2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR\right)}{4m_1R^2 + 4I + 4m_2r^2 + m_3R^2 + \frac{3}{2}m_4R^2}$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_4 = \frac{R\left(2M - 2m_1 gR\sin\alpha - 2m_2 gr + m_3 gR + m_4 gR\right)}{4m_1R^2 + 4I + 4m_2r^2 + m_3R^2 + \frac{3}{2}m_4R^2}$$

Zadanie 3.5.

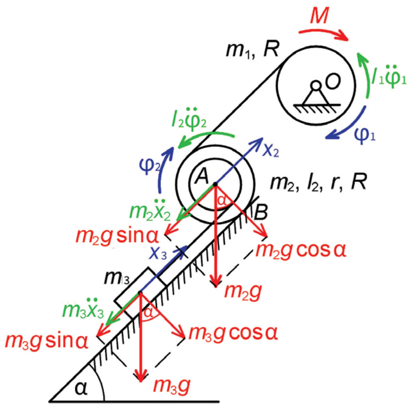
Układ materialny przedstawiony na rys. 3.5 złożony jest ze współśrodkowego krążka o środku A, masie m_2, momencie bezwładności I_2, promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R. Krążek ten jest połączony z masą znajdującą się na równi pochyłej o kącie nachylenia i drugim krążkiem o środku O, masie m_1, promieniu R. Do krążka o środku O przyłożono moment M. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_1, m_2, m_3 oraz przyspieszenia kątowe krążków.



Rys. 3.5. Mechanizm do zadania 3.5

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 3.5 ma jeden stopień swobody. Krążek o środku O wykonuje ruch obrotowy, krążek o środku A ruch płaski, a masa porusza się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu dla krążka O kąt obrotu φ_1 zgodny z przyłożonym momentem, dla krążka A kąt obrotu φ_2 i przemieszczenie środka masy x_2 oraz przemieszczenie masy m_3 jako x_3. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciał o masach m_2 i m_3. Dla krążka O siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających moment $I_1\ddot{\varphi}_1$. Dla krążka A mamy siłę bezwładności $m_2\ddot{x}_2$ oraz parę sił dających moment $I_2\ddot{\varphi}_2$.



Rys. 3.5a

Korzystając z chwilowych środków obrotu w punkcie B, zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki:

$$\varphi_1 R = \varphi_2 2R$$

$$\varphi_2(R - r) = x_3$$

$$x_2 = \varphi_2 R$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne.

$$\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$$

$$(R - r)\delta\varphi_2 = \delta x_3$$

$$\delta x_2 = R\delta\varphi_2$$

Przyjmiemy współrzędną uogólnioną jako φ_2.

Różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{\varphi}_1 = 2\ddot{\varphi}_2$$

$$\ddot{\varphi}_2 \left(R - r\right) = \ddot{x}_3$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{\varphi}_2 R$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(M - I_1\ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 \\ &+\left(-m_3 g \sin\alpha - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 = 0\end{aligned}$$

Moment bezwładności krążka O jest równy:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

Podstawiamy wyliczone zależności z równań więzów uzależnione od zmiennej uogólnionej φ_2:

$$\begin{aligned}&\left(M - m_1 R^2 \ddot{\varphi}_2\right) 2\delta\varphi_2 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{\varphi}_2 R\right) R\delta\varphi_2 \\ &+\left(-m_3 g \sin\alpha - m_3\ddot{\varphi}_2\left(R - r\right)\right)\left(R - r\right)\delta\varphi_2 = 0\end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi_2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\Big(2M - 2m_1 R^2\ddot{\varphi}_2 - I_2\ddot{\varphi}_2 - m_2 g R \sin\alpha - m_2\ddot{\varphi}_2 R^2 - m_3 g\left(R - r\right)\sin\alpha \\ &-m_3\ddot{\varphi}_2\left(R - r\right)^2\Big)\delta\varphi_2 = 0\end{aligned}$$

Wiedząc, że $\delta\varphi \neq 0$, zatem:

$$\begin{aligned}&2M - 2m_1 R^2\ddot{\varphi}_2 - I_2\ddot{\varphi}_2 - m_2 g R \sin\alpha - m_2\ddot{\varphi}_2 R^2 - m_3 g\left(R - r\right)\sin\alpha \\ &-m_3\ddot{\varphi}_2\left(R - r\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\left(2m_1 R^2 + I_2 + m_2 R^2 + m_3\left(R - r\right)^2\right)\ddot{\varphi}_2 = 2M - \left(m_2 R + m_3\left(R - r\right)\right) g \sin\alpha$$

Zatem przyspieszenie kątowe krążka $\ddot{\varphi}_2$ jest równe:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{2M - \left(m_2 R + m_3\left(R - r\right)\right) g \sin\alpha}{2m_1 R^2 + I_2 + m_2 R^2 + m_3\left(R - r\right)^2}$$

Znając $\ddot{\varphi}_2$, wyznaczamy pozostałe wartości przyspieszeń:

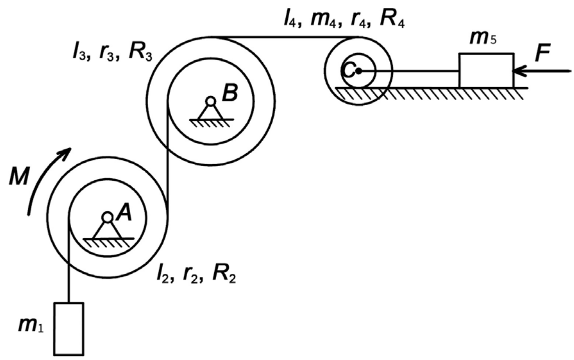
$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{4M - 2\left(m_2 R + m_3\left(R-r\right)\right) g \sin\alpha}{2m_1 R^2 + I_2 + m_2 R^2 + m_3\left(R-r\right)^2}$$

$$\ddot{x}_3 = \left(R-r\right)\frac{2M - \left(m_2 R + m_3\left(R-r\right)\right) g \sin\alpha}{2m_1 R^2 + I_2 + m_2 R^2 + m_3\left(R-r\right)^2}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2MR - \left(m_2 R + m_3\left(R-r\right)\right) gR \sin\alpha}{2m_1 R^2 + I_2 + m_2 R^2 + m_3\left(R-r\right)^2}$$

Zadanie 3.6.

Układ materialny przedstawiony na rys. 3.6 złożony jest z trzech współśrodkowych krążków o środkach odpowiednio A B i C, momentach bezwładności I_2, I_3, I_4, promieniach wewnętrznym r_2, r_3, r_4 i zewnętrznych R_2, R_3, R_4. Do krążka A przyłożony jest moment M. Krążek ten jest połączony z masą. Środek krążka C jest połączony z masą, do której przyłożono siłę F. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_2, m_3, m_4 oraz przyspieszenia kątowe krążków.

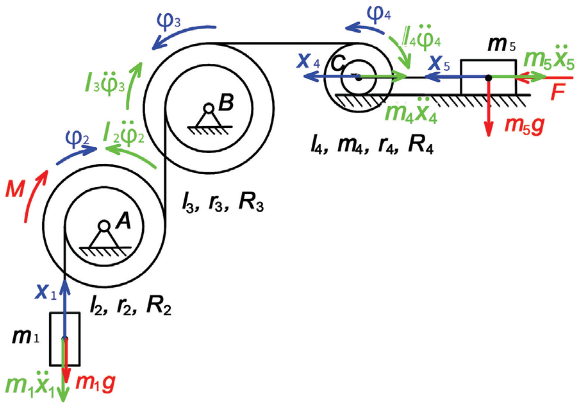


Rys. 3.6. Mechanizm do zadania 3.6

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 3.6 ma jeden stopień swobody. Krążki o środkach A i B wykonują ruch obrotowy, a krążek o środku C ruch płaski. Masy m_1 i m_5 poruszają się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu kąt obrotu φ_2 dla krążka A zgodny z przyłożonym momentem, dla krążka B kąt obrotu φ_2, a dla krążka C kąt obrotu φ_4 i przemieszczenie środka masy x_4. Przemieszczenie masy m_1 oznaczymy jako x_1, masy m_4 jako x_4, a masy m_5 jako x_5. Zaznaczymy również siły bezwładności dla ciał o masach i . Dla krążków A i B siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających moment równy odpowiednio $I_2\ddot{\varphi}_2$, $I_3\ddot{\varphi}_3$. Dla krążka C mamy siłę bezwładności oraz parę sił dających moment $I_4\ddot{\varphi}_4$.



Rys. 3.6a

Zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki (korzystając z chwilowych środków obrotu):

$$x_1 = \varphi_2 r_2$$

$$\varphi_2 R_2 = \varphi_3 r_3$$

$$\varphi_3 R_3 = \varphi_4(r_4 + R_4)$$

$$x_4 = \varphi_4 R_4$$

$$x_4 = x_5$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne.

$$\delta x_1 = \varphi_2 \delta r_2$$

$$R_2 \delta\varphi_2 = r_3 \delta\varphi_3$$

$$R_3 \delta\varphi_3 = (r_4 + R_4)\ \delta\varphi_4$$

$$\delta x_4 = R_4 \delta\varphi_4$$

$$\delta x_4 = \delta x_5$$

Przyjmiemy współrzędną uogólnioną jako φ_4 i wszystkie przemieszczenia uzależnimy od tej współrzędnej:

$$\delta x_1 = \frac{r_2 r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \delta\varphi_4$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \delta\varphi_4$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\left(r_4 + R_4\right)}{R_3} \delta\varphi_4$$

$$\delta x_4 = \delta x_5 = R_4 \delta\varphi_4$$

Z kolei różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = \frac{r_2 r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\left(r_4 + R_4\right)}{R_3} \ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{x}_4 = \ddot{x}_5 = R_4 \ddot{\varphi}_4$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g \sin\alpha - m_1 \ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I_2 \ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3 \ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(-I_4 \ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4 \\ &+ \left(-m_4 \ddot{x}_4\right)\delta x_4 + \left(F - m_5 \ddot{x}_5\right)\delta x_5 = 0\end{aligned}$$

Podstawiamy wyliczone zależności z równań więzów uzależnione od zmiennej uogólnionej φ_4:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g \sin\alpha - m_1 \frac{r_2 r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \ddot{\varphi}_4\right)\frac{r_2 r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3}\delta\varphi_4 \\ &+ \left(M - I_2 \frac{r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3} \ddot{\varphi}_4\right)\frac{r_3 \left(r_4 + R_4\right)}{R_2 R_3}\delta\varphi_4 \\ &+ \left(-I_3 \frac{\left(r_4 + R_4\right)}{R_3} \ddot{\varphi}_4\right)\frac{\left(r_4 + R_4\right)}{R_3}\delta\varphi_4 + \left(-I_4 \ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4 \\ &+ \left(-m_4 R_4 \ddot{\varphi}_4\right) R_4 \delta\varphi_4 + \left(F - m_5 R_4 \ddot{\varphi}_4\right) R_4 \delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi_4$, otrzymujemy:

$$\left(-m_1 g \sin\alpha \frac{r_2 r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3} - m_1 \frac{r_2^2 r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} \ddot{\varphi}_4 + M \frac{r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3}\right.$$
$$-I_2 \frac{r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} \ddot{\varphi}_4 - I_3 \frac{(r_4 + R_4)^2}{R_3^2} \ddot{\varphi}_4 - I_4 \ddot{\varphi}_4 - m_4 R_4^2 \ddot{\varphi}_4$$
$$\left.+FR_4 - m_5 R_4^2 \ddot{\varphi}_4\right) \delta\varphi_4 = 0$$

Wiedząc, że $\delta\varphi_4 \neq 0$, zatem:

$$-m_1 g \sin\alpha \frac{r_2 r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3} - m_1 \frac{r_2^2 r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} \ddot{\varphi}_4 + M \frac{r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3}$$
$$-I_2 \frac{r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} \ddot{\varphi}_4 - I_3 \frac{(r_4 + R_4)^2}{R_3^2} \ddot{\varphi}_4 - I_4 \ddot{\varphi}_4 - m_4 R_4^2 \ddot{\varphi}_4$$
$$+FR_4 - m_5 R_4^2 \ddot{\varphi}_4 = 0$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\left(m_1 \frac{r_2^2 r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} + I_2 \frac{r_3^2 (r_4 + R_4)^2}{R_2^2 R_3^2} + I_3 \frac{(r_4 + R_4)^2}{R_3^2} + I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2\right) \ddot{\varphi}_4$$
$$= -m_1 g \sin\alpha \frac{r_2 r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3} + M \frac{r_3 (r_4 + R_4)}{R_2 R_3} + FR_4$$

Zatem przyspieszenie kątowe krążka $\delta\varphi_4$ jest równe:

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{R_2 R_3 (r_4 + R_4)(-m_1 g r_2 r_3 \sin\alpha + M r_3) + F R_2^2 R_3^2 R_4}{(r_4 + R_4)^2 (m_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 R_2^2) + R_2^2 R_3^2 (I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2)}$$

Znając $\ddot{\varphi}_4$, wyznaczamy pozostałe wartości przyspieszeń:

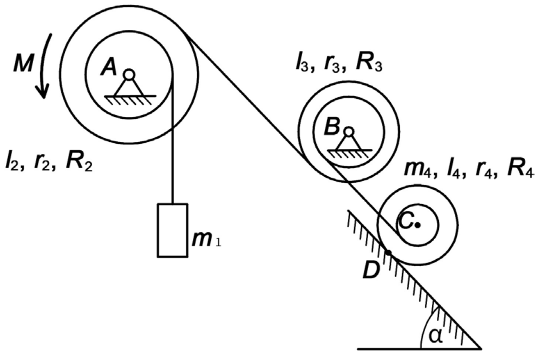
$$\ddot{x}_1 = \frac{r_2 r_3 (r_4 + R_4)^2 (-m_1 g r_2 r_3 \sin\alpha + M r_3) + F r_2 r_3 R_2 R_3 R_4 (r_4 + R_4)}{(r_4 + R_4)^2 (m_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 R_2^2) + R_2^2 R_3^2 (I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2)}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{r_3 (r_4 + R_4)^2 (-m_1 g r_2 r_3 \sin\alpha + M r_3) + F R_2 R_3 r_3 (r_4 + R_4) R_4}{(r_4 + R_4)^2 (m_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 R_2^2) + R_2^2 R_3^2 (I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2)}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{R_2\left(r_4+R_4\right)^2\left(-m_1 g r_2 r_3 \sin\alpha + M r_3\right) + F R_2^2 R_3 R_4\left(r_4+R_4\right)}{\left(r_4+R_4\right)^2\left(m_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^2 R_3^2\left(I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2\right)}$$

$$\ddot{x}_4 = \ddot{x}_5 = \frac{R_2 R_3 R_4\left(r_4+R_4\right)\left(-m_1 g r_2 r_3 \sin\alpha + M r_3\right) + F R_2^2 R_3^2 R_4^2}{\left(r_4+R_4\right)^2\left(m_1 r_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^2 R_3^2\left(I_4 + m_4 R_4^2 + m_5 R_4^2\right)}$$

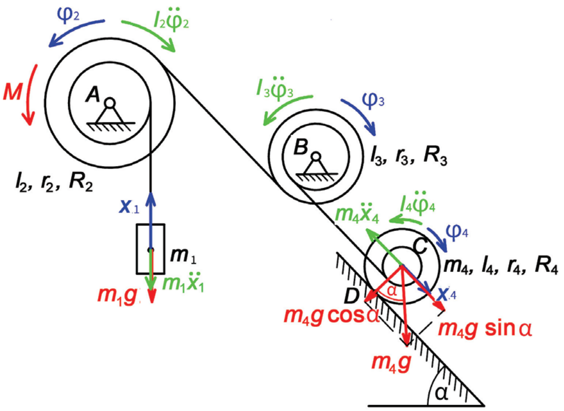
Zadanie 3.7.
Dany jest układ materialny przedstawiony na rys. 3.7 złożony z trzech współśrodkowych krążków i masy m_1 dołączonej do krążka o środku A, do którego jest też przyłożony moment M. Krążek o środku A ma moment bezwładności, promień wewnętrzny r_2 i zewnętrzny R_2. Krążek o środku B ma moment bezwładności I_3, promień wewnętrzny r_3 i zewnętrzny R_3. Krążek o środku C znajduje się na równi pochyłej o kącie nachylenia α, posiada masę m_4, moment bezwładności I_4, promień wewnętrzny r_4 i zewnętrzny R_4. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_1 i m_4 oraz przyspieszenia kątowe krążków.



Rys. 3.7. Mechanizm do zadania 3.7

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 3.7 ma jeden stopień swobody. Krążki o środkach A i B wykonują ruch obrotowy, krążek o środku C ruch płaski, a masa porusza się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu dla krążka A kąt obrotu φ_2 zgodny z przyłożonym momentem, dla krążka B kąt obrotu φ_3, dla krążka C kąt obrotu i przemieszczenie środka masy x_4 oraz przemieszczenie masy m_1 jako x_1. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciała o masie m_1. Dla krążka A i B siła bezwładności sprowadza się do pary sił dających odpowiednio moment $I_2\ddot{\varphi}_2$ oraz $I_3\ddot{\varphi}_3$. Dla krążka C mamy siłę bezwładności $m_4\ddot{x}_4$ oraz parę sił dających moment $I_4\ddot{\varphi}_4$.



Rys. 3.7a

Korzystając z chwilowego środka obrotu w punkcie D, zapiszemy równania więzów wzdłuż linek, porównując przemieszczenia początku i końca linki:

$$x_1 = \varphi_2 r_2$$

$$\varphi_2 R_2 = \varphi_3 R_3$$

$$\varphi_3 r_3 = \varphi_4 (R_4 - r_4)$$

$$\varphi_4 R_4 = x_4$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne. Przyjmiemy współrzędną uogólnioną φ_4 i uzależnimy od niej pozostałe przemieszczenia:

$$\delta x_1 = r_2 \delta\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \delta x_1 = \frac{r_2 R_3 (R_4 - r_4)}{R_2 r_3} \delta\varphi_4$$

$$R_2 \delta\varphi_2 = R_3 \delta\varphi_3 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{R_3 (R_4 - r_4)}{R_2 r_3} \delta\varphi_4$$

$$r_3 \delta\varphi_3 = (R_4 - r_4) \delta\varphi_4 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_3 = \frac{(R_4 - r_4)}{r_3} \delta\varphi_4$$

$$\delta x_4 = R_4 \delta\varphi_4$$

Różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\varphi}_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \frac{r_2 R_3 (R_4 - r_4)}{R_2 r_3} \ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{\varphi}_2 R_2 = \ddot{\varphi}_3 R_3 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{\varphi}_3 r_3 = \ddot{\varphi}_4\left(R_4 - r_4\right) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_3 = \frac{\left(R_4 - r_4\right)}{r_3}\ddot{\varphi}_4$$

$$\ddot{x}_4 = \ddot{\varphi}_4 R_4$$

Korzystając ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(-I_4\ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4\\&+\left(m_4 g\sin\alpha - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0\end{aligned}$$

Podstawiamy wyliczone zależności z równań więzów uzależnione od zmiennej uogólnionej φ_4:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g - m_1\frac{r_2 R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\ddot{\varphi}_4\right)\frac{r_2 R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\delta\varphi_4\\&+\left(M - I_2\frac{R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\ddot{\varphi}_4\right)\frac{R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\delta\varphi_4\\&+\left(-I_3\frac{\left(R_4 - r_4\right)}{r_3}\ddot{\varphi}_4\right)\frac{\left(R_4 - r_4\right)}{r_3}\delta\varphi_4 + \left(-I_4\ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4\\&+\left(m_4 g\sin\alpha - m_4\ddot{\varphi}_4 R_4\right)R_4\delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Wyciągając przed nawias $\delta\varphi_4$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-m_1 g\frac{r_2 R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3} - m_1\frac{r_2^2 R_3^2\left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2}\ddot{\varphi}_4 + M\frac{R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\right.\\&-I_2\frac{R_3^2\left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2}\ddot{\varphi}_4 - I_3\frac{\left(R_4 - r_4\right)^2}{r_3^2}\ddot{\varphi}_4 - I_4\ddot{\varphi}_4\\&\left.+m_4 g R_4\sin\alpha - m_4\ddot{\varphi}_4 R_4^2\right)\delta\varphi_4 = 0\end{aligned}$$

Wiedząc, że $\delta\varphi_4 \neq 0$, zatem:

$$\begin{aligned}&-m_1 g\frac{r_2 R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3} - m_1\frac{r_2^2 R_3^2\left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2}\ddot{\varphi}_4 + M\frac{R_3\left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3}\\&-I_2\frac{R_3^2\left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2}\ddot{\varphi}_4 - I_3\frac{\left(R_4 - r_4\right)^2}{r_3^2}\ddot{\varphi}_4 - I_4\ddot{\varphi}_4 + m_4 g R_4\sin\alpha - m_4\ddot{\varphi}_4 R_4^2 = 0\end{aligned}$$

Grupując i redukując wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\left(m_1 \frac{r_2^2\, R_3^2 \left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2} + I_2 \frac{R_3^2 \left(R_4 - r_4\right)^2}{R_2^2 r_3^2} + I_3 \frac{\left(R_4 - r_4\right)^2}{r_3^2} + I_4 + m_4 R_4^2\right)\ddot{\varphi}_4$$
$$= M \frac{R_3 \left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3} - m_1 g \frac{r_2 R_3 \left(R_4 - r_4\right)}{R_2 r_3} + m_4 g R_4 \sin\alpha$$

Zatem przyspieszenie kątowe krążka $\ddot{\varphi}_4$ jest równe:

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{R_3 \left(R_4 - r_4\right)\left(M R_2 r_3 - m_1 g R_2 r_3 r_2\right) + m_4 g R_2^2 r_3^2 R_4\ \breve{}\ \ \alpha}{\left(R_4 - r_4\right)^2 \left(m_1 r_2^2\, R_3^2 + I_2\, R_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^2 r_3^2 \left(I_4 + m_4 R_4^2\right)}$$

Znając $\ddot{\varphi}_4$, wyznaczamy pozostałe wartości przyspieszeń:

$$\ddot{x}_1 = \frac{r_2\, R_3^2 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(M R_2 r_3 - m_1 g R_2 r_3 r_2\right) + m_4 g R_2^2 r_3^2 R_4 r_2 R_3 \left(R_4 - r_4\right)\sin\alpha}{R_2 r_3 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(m_1 r_2^2\, R_3^2 + I_2\, R_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^3 r_3^3 \left(I_4 + m_4 R_4^2\right)}$$

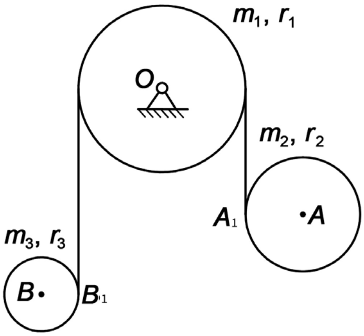
$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{R_3^2 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(M R_2 r_3 - m_1 g R_2 r_3 r_2\right) + m_4 g R_2^2 r_3^2 R_4 R_3 \left(R_4 - r_4\right)\sin\alpha}{R_2 r_3 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(m_1 r_2^2\, R_3^2 + I_2\, R_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^3 r_3^3 \left(I_4 + m_4 R_4^2\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{R_3 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(M R_2 r_3 - m_1 g R_2 r_3 r_2\right) + m_4 g R_2^2 r_3^2 R_4 \left(R_4 - r_4\right)\sin\alpha}{r_3 \left(R_4 - r_4\right)^2 \left(m_1 r_2^2\, R_3^2 + I_2\, R_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^2 r_3^3 \left(I_4 + m_4 R_4^2\right)}$$

$$\ddot{x}_4 = R_4 \frac{R_3 \left(R_4 - r_4\right)\left(M R_2 r_3 - m_1 g R_2 r_3 r_2\right) + m_4 g R_2^2 r_3^2 R_4 \sin\alpha}{\left(R_4 - r_4\right)^2 \left(m_1 r_2^2\, R_3^2 + I_2\, R_3^2 + I_3 R_2^2\right) + R_2^2 r_3^2 \left(I_4 + m_4 R_4^2\right)}$$

Zadanie 3.8.

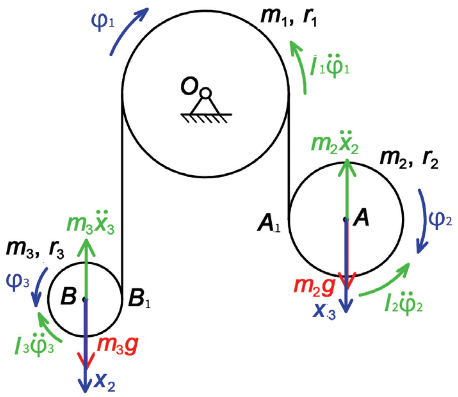
Przez blok o środku O, mogący wykonywać ruch obrotowy wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt O przerzucona jest nieważka nić, na końcach której zamocowane są bloki o środkach w punktach A i B, jak pokazano na rys. 3.8. Masa bloku O wynosi m_1 i posiada promień r_1. Masa bloku A wynosi m_2 i promień r_2. Blok o środku B ma promień r_3 i masę m_3. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia mas m_2 i m_3 oraz przyspieszenia kątowe wszystkich bloków.



Rys. 3.8. Mechanizm do zadania 3.8

Rozwiązanie:
Układ przedstawiony na rys. 3.8 ma trzy stopnie swobody. Krążki o środkach A i B wykonują ruch płaski, a krążek o środku O porusza się ruchem obrotowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu dla bloku A kąt obrotu φ_2 oraz przemieszczenie środka x_2, dla bloku B kąt obrotu φ_3 oraz przemieszczenie środka x_3, dla krążka O kąt obrotu φ_2. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciała o masie m_1. Dla bloku A i B mamy odpowiednio siły bezwładności $m_2\ddot{x}_2$ oraz $m_3\ddot{x}_3$ oraz parę sił dających moment odpowiednio $I_2\ddot{\varphi}_2$ oraz $I_3\ddot{\varphi}_3$.



Rys. 3.8a

Porównując przemieszczenia początku i końca linek, otrzymujemy dwa równania więzów:

$$\varphi_1 r_1 = x_2 - \varphi_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2$$

$$\varphi_1 r_1 = -x_3 + \varphi_3 r_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \varphi_3 r_3 - \varphi_1 r_1$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne. Przyjmiemy współrzędne uogólnione φ_1, φ_2, φ_3 i uzależnimy od nich pozostałe przemieszczenia:

$$\delta x_2 = r_1 \delta\varphi_1 + r_2 \delta\varphi_2$$

$$\delta x_3 = r_3 \delta\varphi_3 - r_1 \delta\varphi_1$$

Różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równania więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{\varphi}_1 r_1 + \ddot{\varphi}_2 r_2$$

$$\ddot{x}_3 \ ? \quad \ddot{\varphi}_1 r_1 \quad \ddot{\varphi}_3 r_3$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-I_1\ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(m_2 g - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 \\ &+ \left(m_3 g - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 = 0\end{aligned}$$

Momenty bezwładności wynoszą:

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$$

$$I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

$$I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$$

Podstawiamy wyliczone zależności z równań więzów uzależnione od zmiennych uogólnionych:

$$\begin{aligned}&-\frac{m_1 r_1^2}{2}\ddot{\varphi}_1\delta\varphi_1 - \frac{m_2 r_2^2}{2}\ddot{\varphi}_2\delta\varphi_2 + \left(m_2 g - m_2\left(\ddot{\varphi}_1 r_1 + \ddot{\varphi}_2 r_2\right)\right)\left(r_1\delta\varphi_1 + r_2\delta\varphi_2\right) \\ &-\frac{m_3 r_3^2}{2}\ddot{\varphi}_3\delta\varphi_3 + \left(m_3 g - m_3\left(-\ddot{\varphi}_1 r_1 + \ddot{\varphi}_3 r_3\right)\right)\left(r_3\delta\varphi_3 - r_1\delta\varphi_1\right) = 0\end{aligned}$$

Grupując, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left(-\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right)r_1^2\ddot{\varphi}_1 - m_2 r_1 r_2\ddot{\varphi}_2 + m_3 r_1 r_3\ddot{\varphi}_3 + \left(m_2 - m_3\right)g r_1\right)\delta\varphi_1 \\ &+\left(-m_2 r_1 r_2\ddot{\varphi}_1 - \frac{3m_2}{2}r_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2 g r_2\right)\delta\varphi_2 \\ &+\left(m_3 r_1 r_3\ddot{\varphi}_1 - \frac{3m_3}{2}r_3^2\ddot{\varphi}_3 + m_3 g r_3\right)\delta\varphi_3 = 0\end{aligned}$$

Wiedząc, że $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$, $\delta\varphi_3 \neq 0$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{m_1}{2}+m_2+m_3\right)r_1^2\ddot{\varphi}_1 - m_2 r_1 r_2 \ddot{\varphi}_2 + m_3 r_1 r_3 \ddot{\varphi}_3 + \left(m_2 - m_3\right) g r_1 = 0 \\ -m_2 r_1 r_2 \ddot{\varphi}_1 - \dfrac{3m_2}{2} r_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g r_2 = 0 \\ m_3 r_1 r_3 \ddot{\varphi}_1 - \dfrac{3m_3}{2} r_3^2 \ddot{\varphi}_3 + m_3 g r_3 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego i trzeciego równania wyliczamy $\ddot{\varphi}_2$ i $\ddot{\varphi}_3$ w zależności od $\ddot{\varphi}_1$ i wstawiamy do pierwszego:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{2g - 2r_1\ddot{\varphi}_1}{3r_2}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{2g + 2r_1\ddot{\varphi}_1}{3r_3}$$

$$-\left(\frac{m_1}{2}+m_2+m_3\right)r_1\varphi_1 - m_2 r_2 \frac{2g - 2r_1\ddot{\varphi}_1}{3r_2} + m_3 r_3 \frac{2g + 2r_1\ddot{\varphi}_1}{3r_3} + \left(m_2 - m_3\right) g = 0$$

Zatem przyspieszenia kątowe bloków są równe:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2\left(m_2 - m_3\right) g}{r_1\left(3m_1 + 2m_2 + 2m_3\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{6m_1 g + 8m_3 g}{3r_2\left(3m_1 + 2m_2 + 2m_3\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{6m_1 g + 8m_2 g}{3r_3\left(3m_1 + 2m_2 + 2m_3\right)}$$

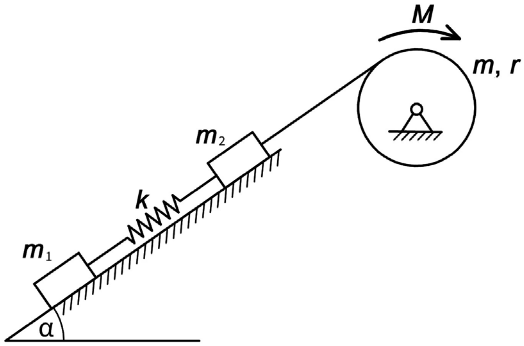
Znając przyspieszenia kątowe, możemy wyznaczyć przyspieszenia liniowe:

$$\ddot{x}_3 = \frac{6m_1 g + 2m_2 g + 6m_3 g}{3\left(3m_1 + 2m_2 + 2m_3\right)}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{6m_1 g + 2m_2 g + 6m_3 g}{3\left(3m_1 + 2m_2 + 2m_3\right)}$$

Zadanie 3.9.

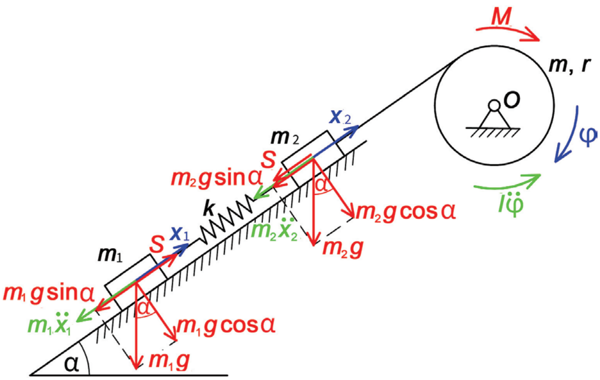
Przez blok o masie m i promieniu r mogący wykonywać ruch obrotowy przerzucona jest nieważka nić, na końcu której zamocowane są dwie masy m_1 i m_2, połączone sprężyną o współczynniku sztywności k, jak pokazano na rys. 3.9. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i wprawiane są w ruch za pomocą momentu M przyłożonego do bloku. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć układ równań opisujący zależności pomiędzy przyspieszeniami tych ciał.



Rys. 3.9. Mechanizm do zadnia 3.9

Rozwiązanie:
Układ przedstawiony na rys. 3.9 ma dwa stopnie swobody. Blok wykonuje ruch obrotowy, a masy m_1 i m_2 poruszają się ruchem postępowym.

Zaznaczymy na schemacie naszego układu dla bloku kąt obrotu φ oraz przemieszczenie masy m_1 jako x_1, przemieszczenie masy m_2 jako x_2. Zaznaczamy również siły bezwładności dla ciała o masie m_1 i m_2. Dla bloku mamy parę sił dających moment odpowiednio $I\ddot{\varphi}$.



Rys. 3.9a

Porównując przemieszczenia początku i końca linki, otrzymujemy jedno równanie więzów:

$$\varphi r = x_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{x_2}{r}$$

Policzymy wariacje, czyli przemieszczenia wirtualne. Przyjmiemy współrzędne uogólnione x_1, x_2 i uzależnimy od nich kąt φ:

$$\delta\varphi = \frac{\delta x_2}{r}$$

Różniczkując dwukrotnie stronami po czasie równanie więzów, otrzymamy zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_2}{r}$$

Korzystając z ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\left(M - I\ddot{\varphi}\right)\delta\varphi + \left(S - m_1 g \sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-S - m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

Moment bezwładności wynosi:

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

Siła od sprężyny jest równa:

$$S = k\left(x_2 - x_1\right)$$

Podstawiamy powyższe wzory oraz wyliczone zależności z równania więzów uzależnione od zmiennej uogólnionej:

$$\left(M - \frac{mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_2}{r}\right)\frac{\delta x_2}{r} + \left(k\left(x_2 - x_1\right) - m_1 g \sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1$$
$$+\left(-k\left(x_2 - x_1\right) - m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

Grupując, otrzymujemy:

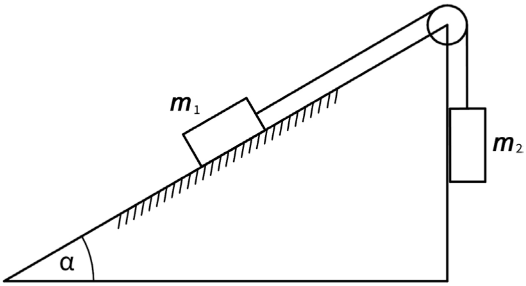
$$\left(k\left(x_2 - x_1\right) - m_1 g \sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1$$
$$+\left(\frac{M}{r} - \frac{m\ddot{x}_2}{2} - k\left(x_2 - x_1\right) - m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

Wiedząc, że $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 \neq 0$, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} k\left(x_2 - x_1\right) - m_1 g \sin\alpha - m_1\ddot{x}_1 = 0 \\ \dfrac{M}{r} - \dfrac{m\ddot{x}_2}{2} - k\left(x_2 - x_1\right) - m_2 g \sin\alpha - m_2\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

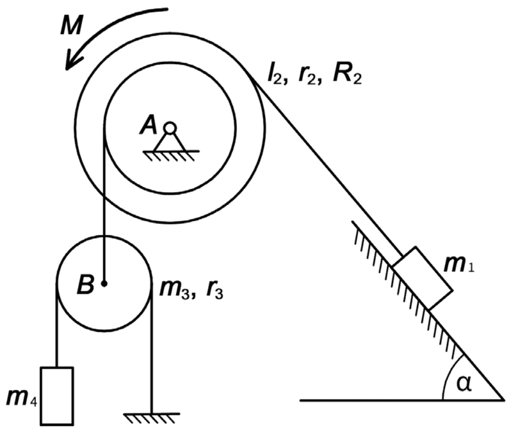
3.3. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 3.10.
Na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia znajduje się ciało o masie m_1, które połączone jest za pomocą nieważkiej i nierozciągliwej nici z ciałem o masie m_2, $m_2 > m_1$, jak na rys. 3.10. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia tych mas.



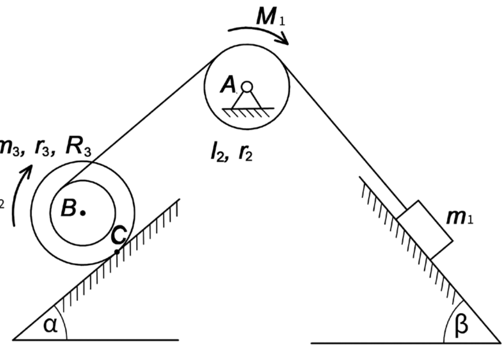
Rys. 3.10. Mechanizm do zadnia 3.10

Zadanie 3.11.
Układ materialny przedstawiony na rys. 3.11 złożony jest z dwóch współśrodkowych krążków o środku A, momencie bezwładności I_2 oraz promieniach r, R, do którego jest przyłożony moment M. Krążek ten połączony jest z drugim krążkiem o środku B, masie m_3 i promieniu r_3, do którego jest zamocowane ciało o masie m_4. Ciało o masie m_1 znajduje się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α i jest połączone ze współśrodkowym krążkiem o środku A. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenia mas m_1, m_3 oraz m_4.



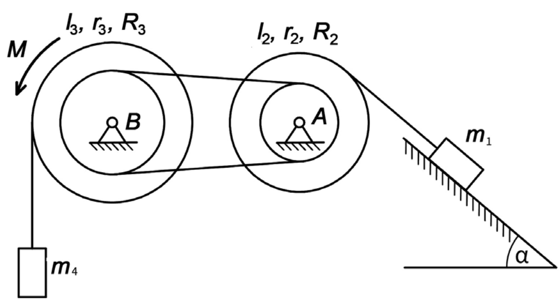
Rys. 3.11. Mechanizm do zadania 3.11

Zadanie 3.12.
Współśrodkowy walec o momencie bezwładności I_3, masie m_3 oraz promieniach zewnętrznym R_3 i wewnętrznym r_3, toczy się bez poślizgu, pod wpływem przyłożonego momentu M_2, po gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α. Połączony jest z blokiem o momencie bezwładności I_2, promieniu r_2, do którego przyłożono moment M_1, jak pokazano na rys. 3.12. Na równi pochyłej o kącie nachylenia β znajduje się ciało o masie m_1, połączone nicią z blokiem o środku A. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenia mas m_1 i m_3.



Rys. 3.12. Mechanizm do zadania 3.12

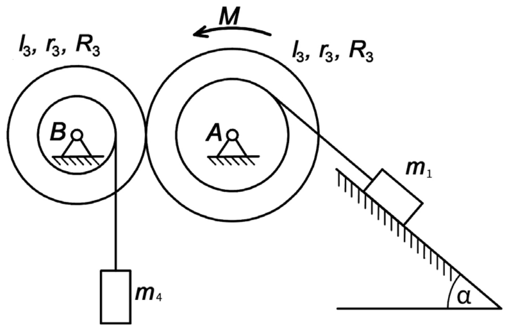
Zadanie 3.13.
Układ materialny przedstawiony na rys. 3.13 składa się z dwóch współśrodkowych walców o środku odpowiednio w punktach A i B, momentach bezwładności I_2, I_3 oraz promieniach wewnętrznych r_2, r_3 i zewnętrznych R_2, R_3 połączonych za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Do bloku o środku A dołączono masę m_1, znajdującą się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α. Blok B wprawiany jest w ruch za pomocą przyłożonego momentu M oraz zawieszonej masy m_4. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenia mas m_1 i m_4.



Rys. 3.13. Mechanizm do zadania 3.13

Zadanie 3.14.

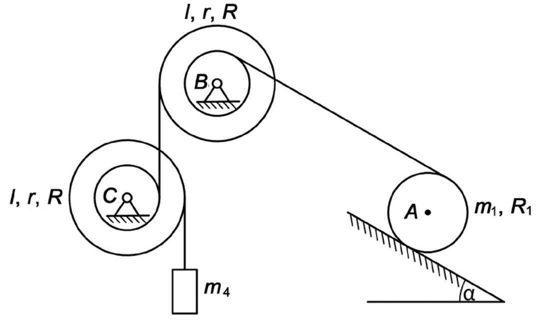
Układ materialny przedstawiony na rysunku 3.14 składa się z dwóch współśrodkowych walców o środku odpowiednio w punktach A i B, momentach bezwładności I_2, I_3 oraz promieniach wewnętrznych r_2, r_3 i zewnętrznych R_2, R_3. Do bloku o środku A dołączono masę m_1 znajdującą się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α. Blok A wprawiany jest w ruch za pomocą przyłożonego momentu M. Przez blok o środku B przerzucono linkę i zawieszono na niej ciało o masie m_4. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Tarcie zaniedbujemy. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenia mas m_1 i m_4.



Rys. 3.14. Mechanizm do zadania 3.14

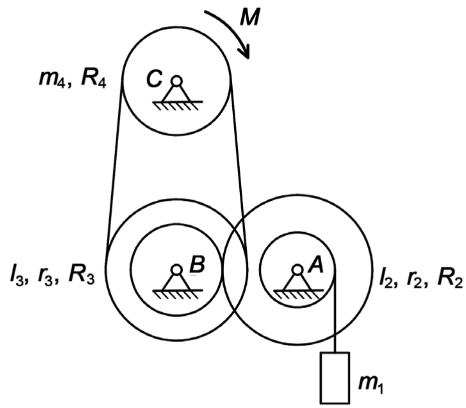
Zadanie 3.15.

Układ materialny przedstawiony na rys. 3.15 składa się z dwóch identycznych współśrodkowych walców o środku odpowiednio w punktach B i C, momentach bezwładności I oraz promieniach wewnętrznych r i zewnętrznych R, połączonych za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Do bloku o środku B dołączono walec o masie m_1 i promieniu R_1, znajdujący się na gładkiej równi pochyłej o kącie nachylenia α. Blok C wprawiany jest w ruch za pomocą zawieszonej masy m_4. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe walców oraz przyspieszenia mas m_1 i m_4.



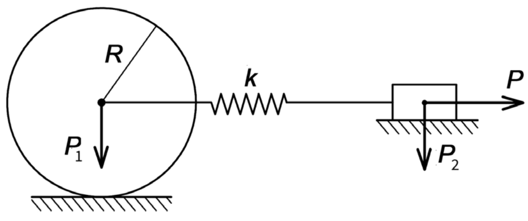
Rys. 3.15. Mechanizm do zadania 3.15

Zadanie 3.16.
Układ materialny przedstawiony na rys. 3.16 składa się z dwóch współśrodkowych walców o środku odpowiednio w punktach A i B, momentach bezwładności I_2, I_3, promieniach wewnętrznych r_2, r_3 i zewnętrznych R_2, R_3 oraz walca o środku C, masie m_4 i promieniu R_4, do którego przyłożono moment M. Przez blok o środku A przerzucono linkę i zawieszono na niej ciało o masie m_1. Ciała znajdują się w polu grawitacyjnym i są połączone ze sobą za pomocą nierozciągliwych, nieważkich nici. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć przyspieszenia kątowe krążków oraz przyspieszenie masy m_1.



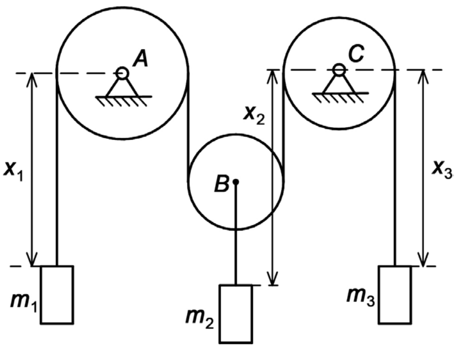
Rys. 3.16. Mechanizm do zadania 3.16

Zadanie 3.17.
Walec o ciężarze P_1, toczący się po powierzchni, jak pokazano na rys. 3.17, połączony jest za pomocą sprężyny o sztywności k z ciałem o ciężarze P_2, do którego przyłożono poziomą siłę P. Korzystając z ogólnego równania dynamiki, wyznaczyć układ równań opisujący zależności pomiędzy przyspieszeniami tych ciał.



Rys. 3.17. Mechanizm do zadania 3.17

Zadanie 3.18.
Przez dwa krążki zamocowane na podporze stałej i jeden krążek ruchomy przechodzi nierozciągliwa nieważka linka, na końcach której zawieszono masy m_1 i m_3. Masę m_2 przyłączono do ruchomego krążka, jak na rys. 3.18. Pomijając masy krążków, znaleźć przyspieszenia mas m_1, m_2, m_3.



Rys. 3.18. Mechanizm do zadania 3.18

IV. RÓWNANIA LAGRANGE'A

W 1788 roku, dokładnie 101 lat po Newtonie, Joseph Louis Lagrange opublikował wyniki swoich prac w książce *Mechanique Analytique*. Podejście Lagrange'a jest równoważne podejściu Newtona, jednak jest bardziej elastyczne ze względu na wybór współrzędnych. Zamiast współrzędnych kartezjańskich będziemy rozważać współrzędne uogólnione, których jest dokładnie tyle samo, co stopni swobody, a tym samym tyle, co równań Lagrange'a. W odróżnieniu od równań Newtona równania Lagrange'a mają taką samą postać w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych. Sformułowanie Lagrange'a opierać się będzie na funkcji Lagrange'a, która jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej rozważanego układu, a zatem zależy zarówno od położenia, jak i prędkości. Zaletą podejścia Lagrange'a jest to, że eliminujemy z zadania siły reakcji więzów, co stanowi duże uproszczenie w rozwiązaniu. Metoda ta znacznie gorzej nadaje się do opisu układów z tarciem [1,15,17].

4.1. RÓWNANIA LAGRANGE'A I RODZAJU

Ogólne równanie dynamiki $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{P}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\delta\boldsymbol{r}_i = 0$ mówi, że podczas ruchu układu w dowolnej chwili suma prac sił aktywnych $\boldsymbol{P}_i$ i sił bezwładności $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ na dowolnych przemieszczeniach wirtualnych jest równa zero. Zatem ogólne równanie dynamiki jest spełnione zawsze dla dowolnego, zgodnego z więzami ruchu, odpowiadającego danym siłom aktywnym $\boldsymbol{P}_i$, i = 1, 2, …, n.

Przypuśćmy, że dany jest pewien zgodny z więzami ruch układ, dla którego spełnione jest ogólne równanie dynamiki. Przyjmując $\boldsymbol{P}_i$, i = 1, 2, …, n jako wypadkową sił reakcji działających na ten układ, możemy zapisać:

$$\boldsymbol{R}_i = m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{P}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1}$$

W dowolnej chwili można dobrać takie reakcje $\boldsymbol{P}_i$, które byłyby dopuszczalne dla danych więzów i dla których zachodzą równania wynikające z II zasady dynamiki Newtona:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{R}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2}$$

Zakładamy, że reakcje $\boldsymbol{P}_i$ są realizowalne i wobec tego rozważany ruch odpowiada danym siłom aktywnym $\boldsymbol{P}_i(t, r_\mu, v_\mu)$.

Wyrażenia opisujące reakcje $\boldsymbol{P}_i$ znajduje się, korzystając z metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Zależności określające wirtualne przemieszczenia punktów układu można zapisać następująco:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, d \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{\beta i} \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, g \tag{4.4}$$

Występujący w równaniu (4.4) wektor $I_{\beta i}$ jest daną funkcją zależną od czasu i r_μ.

Mnożąc stronami równanie (4.3) przez dowolny mnożnik skalarny $-\lambda\alpha$, a (4.4) przez $-\mu_\beta$ i dodając otrzymane równości do równania $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \delta \boldsymbol{r}_i = 0$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{R}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} - \sum_{i=1}^{n} \mu_\beta \boldsymbol{I}_{\beta i} \right) \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.5}$$

Nieoznaczone mnożniki λ_α, μ_β można tak dobrać, aby wszystkie wektorowe współczynniki w powyższym równaniu były równe zero. Wówczas otrzymujemy ogólne wyrażenie na reakcje więzów idealnych za pomocą nieoznaczonych współczynników Lagrange'a:

$$\boldsymbol{R}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_\beta \boldsymbol{I}_{\beta i} \tag{4.6}$$

Podstawiając wyrażenie (4.6) do wzoru (4.2) wynikającego z II zasady dynamiki Newtona $m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{R}_i$, otrzymujemy **równania Lagrange'a pierwszego rodzaju**:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_\beta \boldsymbol{I}_{\beta i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

Do tych równań należy jeszcze dołączyć równania więzów w postaci:

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, d \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{\beta i} \dot{\boldsymbol{r}}_i + D_\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, g \tag{4.9}$$

Występujący w równaniu (4.4) skalar D_β jest daną funkcją zależną od czasu i $\boldsymbol{r}_\mu$.

4.2. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Dla każdego układu materialnego o więzach idealnych przy wszelkich możliwych przemieszczeniach przygotowanych spełnione musi być ogólne równanie dynamiki:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.10}$$

Jeśli mamy do czynienia z więzami holonomicznymi, skleronomicznymi oraz reonomicznymi, położenie układu materialnego możemy opisać za pomocą niezależnych współrzędnych uogólnionych q_1, q_2, …, q_s, a przesunięcie przygotowane $\delta\boldsymbol{r}_i$ punktu A_i możemy wyrazić za pomocą wzoru:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{4.11}$$

Ogólnie można przyjąć, że:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_s, t\right)$$

Rozpatrywany układ materialny jest w ruchu, zatem współrzędne uogólnione są funkcjami czasu:

$$q_j = q_j\left(t\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

Współrzędne uogólnione są z założenia niezależne, zatem ich wariacje δq_1, δq_2, …, δq_s można przyjąć dowolnie.

Załóżmy, że wszystkie wariacje oprócz jednej δq_j będą równe zero, wówczas:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Składowe prostokątne tak przyjętego przesunięcia przygotowanego są następujące:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{4.12}$$

Współrzędne (x_i, y_i, z_i) określają współrzędne punktu A_i.

Podstawiając współrzędne uogólnione do ogólnego równania dynamiki, otrzymujemy:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0 \tag{4.13}$$

Równanie (4.13) jest spełnione dla dowolnego δq_j różnego od zera, zatem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{P_i} - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = 0 \tag{4.14}$$

Czyli:

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P_i}\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} \tag{4.15}$$

Równań postaci (4.15) możemy zapisać tyle, ile mamy współrzędnych uogólnionych, czyli tyle, ile układ ma stopni swobody. Lewa strona powyższego równania jest równa sile uogólnionej Q_j odpowiadającej współrzędnej q_j, a we współrzędnych prostokątnych ma postać:

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P_i}\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(P_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = Q_j \tag{4.16}$$

Porównując wzory (4.15) i (4.16), otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = Q_j \tag{4.17}$$

Aby przekształcić lewą stronę równania, wyprowadzimy najpierw dwie tożsamości.

PIERWSZA TOŻSAMOŚĆ

Wiemy, że promień – wektor $\boldsymbol{r}_i$ jest funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu. Te współrzędne są również pewnymi funkcjami czasu, zatem stosując regułę różniczkowania dla funkcji złożonej, otrzymujemy:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial t} \tag{4.18}$$

gdzie:

$\boldsymbol{v}_i$ – oznacza prędkość punktu A_i,
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$ – rędkości uogólnione.

Po obustronnym zróżniczkowaniu cząstkowym równania (4.18) po prędkości uogólnionej $\dot{q}_j$ otrzymujemy następującą tożsamość:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} \tag{4.19}$$

DRUGA TOŻSAMOŚĆ

Aby wyprowadzić drugą tożsamość, zróżniczkujemy po czasie wyrażenie $\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}$. Wiedząc, że wyrażenie to zależy bezpośrednio od czasu oraz za pośrednictwem współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \ldots, q_s$ zapiszemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2+\dots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial t \partial q_j} \tag{4.20}$$

Różniczkując cząstkowo względem współrzędnej uogólnionej q_j równanie (4.20), otrzymujemy:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2+\dots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j \partial t} \tag{4.21}$$

Prawe strony równań (4.20) i (4.21) są równe, zatem porównując, otrzymujemy drugą tożsamość:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \tag{4.22}$$

Wiedząc, że lewą stronę równania (4.17) można zapisać w postaci:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\right)-m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\right) \tag{4.23}$$

Wykorzystując dwie wyprowadzone tożsamości (4.19) i (4.22), możemy przekształcić wyrażenie (4.23) do postaci:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}\right) \tag{4.24}$$

Wiedząc, że $\dot{\boldsymbol{r}}_i^2=v_i^2$, otrzymujemy:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right\}=$$
$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

Suma $\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}$ występująca w powyższym równaniu jest równa energii kinetycznej T rozpatrywanego układu, zatem:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) \tag{4.25}$$

Równanie (4.17) przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{4.26}$$

Liczba równań tego typu jest równa liczbie stopni swobody tego układu i jest równa liczbie współrzędnych uogólnionych. Równania tego typu nazywamy **równaniami Lagrange'a drugiego rodzaju** lub **równaniami Lagrange'a we współrzędnych uogólnionych**. Są to równania różniczkowe ruchu układu materialnego o więzach idealnych, holonomicznych i nie zawierają niewiadomych reakcji więzów.

4.3. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU W POLU POTENCJALNYM

Rozpatrzmy przypadek, kiedy układ materialny znajduje się w zachowawczym polu sił. Wówczas składowe siły $\boldsymbol{P}_i$ przyłożonej w punkcie $A_i(x_i, y_i, z_i)$ wyrażają się w zależności od energii potencjalnej U następująco:

$$P_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$$P_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$P_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

Siłę uogólnioną można zapisać jako pochodną energii potencjalnej U po współrzędnej uogólnionej ze znakiem minus:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{4.27}$$

Podstawiając wzór (4.27) do wzoru na równania Lagrange'a (4.26), otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{4.28}$$

Przenosząc wszystko na jedną stronę, mamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,2,\ldots,s \tag{4.29}$$

Wiedząc, że energia potencjalna U nie zależy od prędkości uogólnionych $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s$ dostajemy więc $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} \tag{4.30}$$

Wstawiając wyrażenie (4.30) do wzoru (4.29), otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,2,\ldots,s \tag{4.31}$$

Oznaczmy przez L wyrażenie równe różnicy energii kinetycznej i potencjalnej:

$$L=T-U \tag{4.32}$$

Wyrażenie to nazwiemy **potencjałem kinetycznym** lub **lagrangianem**.

Ostatecznie równania Lagrange'a II rodzaju w polu potencjalnym można zapisać następująco:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \qquad j=1,2,\ldots,s \tag{4.33}$$

4.4. FUNKCJA DYSSYPACJI ENERGII

W przypadku gdy mamy do czynienia z drganiami tłumionymi, pojawia się rozpraszanie energii układu, co dla więzów skleronomicznych można zapisać:

$$D=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad b_{ij}=b_{ji} \tag{4.34}$$

Funkcja ta nosi nazwę **funkcji dyssypacji energii**.

Gdy w układzie występuje rozpraszanie energii, wówczas równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j=1,2,\ldots,s \tag{4.35}$$

4.5. ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 4.1.
Punkt materialny o masie porusza się pod wpływem siły ciężkości po płaszczyźnie o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$. Warunki początkowe: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = -\frac{D}{C}$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = v_{0y}$, $\dot{z}(0) = 0$. Znaleźć równanie ruchu punktu.

Rozwiązanie:
Równania Lagrange'a I rodzaju przyjmują postać:

$$m\ddot{x} = \lambda A$$

$$m\ddot{y} = \lambda B$$

$$m\ddot{z} = \lambda C - mg$$

Równanie więzów w naszym przypadku jest równaniem płaszczyzny, po której porusza się punkt:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równania więzów otrzymujemy:

$$A\ddot{x} + B\ddot{y} + C\ddot{z} = 0$$

Mnożąc stronami równania Lagrange'a odpowiednio przez A, B, C i dodając stronami, otrzymujemy:

$$m\left(A\ddot{x} + B\ddot{y} + C\ddot{z}\right) = \lambda\left(A^2 + B^2 + C^2\right) - mgC$$

Korzystając z faktu, że $A\ddot{x} + B\ddot{y} + C\ddot{z} = 0$, lewa strona powyższej równości jest równa zero, zatem wyznaczymy mnożnik λ:

$$\lambda = \frac{mgC}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równań Lagrange'a, otrzymujemy:

$$\ddot{x} = \frac{gAC}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\ddot{y} = \frac{gBC}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\ddot{z} = \frac{gC^2}{A^2 + B^2 + C^2} - g = \frac{-g\left(A^2 + B^2\right)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Całkując dwukrotnie po dt, otrzymujemy:

$$x = \frac{gAC}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 + C_1 t + C_2$$

$$y = \frac{gBC}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 + C_3 t + C_4$$

$$z = \frac{-g\left(A^2 + B^2\right)}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 + C_5 t + C_6$$

Korzystając z warunków początkowych, możemy wyliczyć stałe całkowania:

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_4 = 0$$

$$z(0) = -\frac{D}{C} \;\Rightarrow\; C_6 = -\frac{D}{C}$$

$$\dot{x}(0) = v_{0x} \;\Rightarrow\; C_1 = v_{0x}$$

$$\dot{y}(0) = v_{0y} \;\Rightarrow\; C_3 = v_{0y}$$

$$\dot{z}(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_5 = 0$$

Zatem równanie ruchu punktu materialnego opisane jest równaniami:

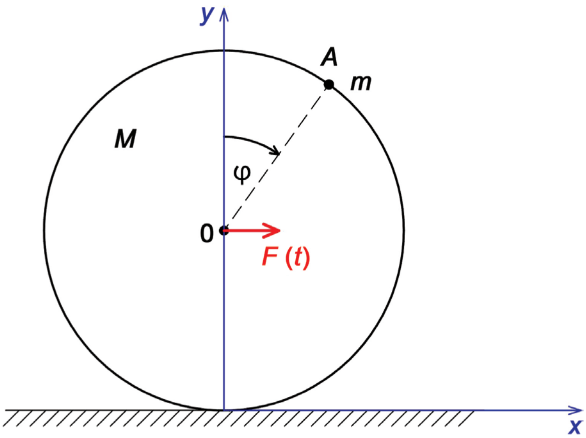
$$x = \frac{gAC}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 + v_{0x} t$$

$$y = \frac{gBC}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 + v_{0y} t$$

$$z = \frac{-g\left(A^2 + B^2\right)}{2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} t^2 - \frac{D}{C}$$

Zadanie 4.2.

Jednorodny krążek, przedstawiony na rys. 4.1 o promieniu i masie z umieszczoną na jego powierzchni masą porusza się po płaszczyźnie poziomej bez tarcia pod wpływem siły $F(t)$ przyłożonej w jego środku. Wyznaczyć równanie ruchu układu.



Rys. 4.1. Mechanizm do zadania 4.2

Rozwiązanie:

Krążek o środku w punkcie O wykonuje ruch obrotowy wokół środka O oraz ruch postępowy, czyli porusza się ruchem płaskim. Układ ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej krążka i energii kinetycznej punktu materialnego. Oznaczmy krążek jako (1) i punkt materialny (2), zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M v_O^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

Wyznaczymy teraz współrzędne punktów O i A. Środek krążka przemieścił się o $r\varphi$ i jego współrzędne są równe:

$$x_O = r\varphi \quad y_O = r$$

$$\dot{x}_O = r\dot{\varphi} \quad \dot{y}_O = 0$$

Prędkość punktu O jest równa:

$$v_O^2 = \dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2$$

$$v_O^2 = r^2 \dot{\varphi}^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = r\varphi + r\sin\varphi \qquad y_A = r + r\cos\varphi$$

$$\dot{x}_A = r\dot{\varphi} + r\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_A = -r\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \left(r\dot{\varphi} + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-r\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_A^2 = r^2\dot{\varphi}^2\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$v_A^2 = 2r^2\dot{\varphi}^2\left(1 + \cos\varphi\right)$$

Wstawiając do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_O^2 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m2r^2\dot{\varphi}^2\left(1 + \cos\varphi\right)$$

$$T = \frac{3}{4}Mr^2\dot{\varphi}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2\left(1 + \cos\varphi\right)$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału równoległą do płaszczyzny, po której porusza się krążek, przechodzącą przez jego środek, czyli punkt O. Zatem energia potencjalna będzie równa tylko energii potencjalnej ciała punktowego, bo środek krążka będzie leżał na linii zerowego potencjału:

$$U = mgr\cos\varphi$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszej współrzędnej uogólnionej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{3}{2}Mr^2\dot{\varphi} + 2mr^2\dot{\varphi}\left(1 + \cos\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}Mr^2\ddot{\varphi} + 2mr^2\ddot{\varphi}\left(1 + \cos\varphi\right) - 2mr^2 sin\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -mr^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -mgr\sin\varphi$$

Wyznaczmy jeszcze siłę uogólnioną, korzystając z zasady prac przygotowanych

$$\delta L = \boldsymbol{F}(t) \cdot \delta \boldsymbol{r_O}$$

$$\boldsymbol{r_O} = (r\varphi, r)$$

$$\delta \boldsymbol{r_O} = (r\delta\varphi, 0)$$

$$\delta L = (F(t), 0) \cdot (r\delta\varphi, 0) = F(t) r \delta\varphi$$

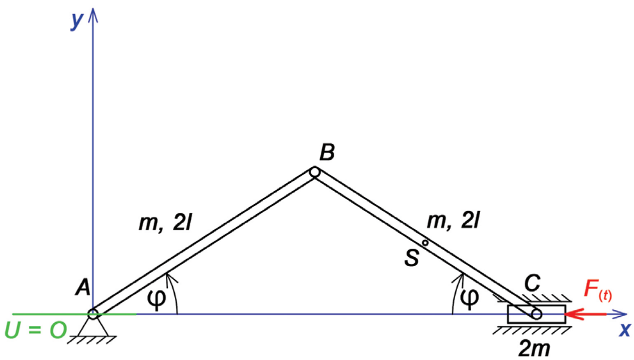
$$Q_\varphi = F(t) r$$

Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, otrzymujemy po redukcji wyrazów podobnych równanie ruchu:

$$\frac{3}{2} Mr^2\ddot{\varphi} + 2mr^2\ddot{\varphi}(1+\cos\varphi) - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - mgr\sin\varphi = F(t)r$$

Zadanie 4.3.

W mechanizmie przedstawionym na rys. 4.2 korba AB ma długość $2l$, masę i jest połączona przegubowo z prętem BC również o długości $2l$ i masie m. Masa wodzika C wynosi $2m$. Mechanizm porusza się pod wpływem siły $F(t)$ przyłożonej do wodzika w punkcie C. Wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.2. Mechanizm do zadania 4.3

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 4.2 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Pręt AB wykonuje ruch obrotowy wokół punktu A, pręt BC wykonuje ruch płaski, natomiast wodzik C porusza się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta AB, pręta BC i energii kinetycznej wodzika C. Oznaczmy pręt AB jako (1), pręt BC jako (2) i wodzik jako (3). Zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 m v_C^2$$

Wyznaczymy momenty bezwładności prętów AB i BC odpowiednio wokół punktu A i punktu S:

$$I_A = \frac{1}{3} m \left(2l\right)^2 = \frac{4}{3} m l^2$$

$$I_S = \frac{1}{12} m \left(2l\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Współrzędne punktu S są równe:

$$x_S = 3l \cos\varphi \qquad y_S = l \sin\varphi$$

$$\dot{x}_S = -3l \sin\varphi \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = l \cos\varphi \dot{\varphi}$$

Prędkość punktu S jest równa:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2$$

$$v_S^2 = \left(-3l \sin\varphi \dot{\varphi}\right)^2 + \left(l \cos\varphi \dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_S^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 \left(9 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)$$

$$v_S^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 \left(8 \sin^2\varphi + 1\right)$$

Współrzędne punktu C są równe:

$$x_C = 4l \cos\varphi \qquad y_S = 0$$

$$\dot{x}_C = -4l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_C = 0$$

Prędkość punktu C jest równa:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$$

$$v_C^2 = \left(-4l \sin\varphi \dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_C^2 = 16 l^2 \sin^2\varphi \dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 m v_C^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \cdot l^2 \dot{\varphi}^2 \left(8 \sin^2 \varphi + 1 \right) + m \cdot 16 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 20 m l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna wodzika będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości obu prętów.

$$U = mgl \sin \varphi + mgl \sin \varphi$$

$$U = 2mgl \sin \varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 20 m l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 - 2mgl \sin \varphi$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszej współrzędnej uogólnionej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{8}{3} m l^2 \dot{\varphi} + 40 m l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{8}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + 40 m l^2 \left(2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \ddot{\varphi} \right)$$
$$= \left(\frac{8}{3} m l^2 + 40 m l^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 40 m l^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 40 m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2mgl \cos \varphi = 20 m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi - 2mgl \cos \varphi$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, wyznaczmy siłę uogólnioną Q_φ:

$$\delta L = \boldsymbol{F}(t)\cdot\delta\boldsymbol{r}_C$$

$$\boldsymbol{r}_C = (4l\cos\varphi, 0)$$

$$\delta\boldsymbol{r}_C = (-4l\sin\varphi\,\delta\varphi, 0)$$

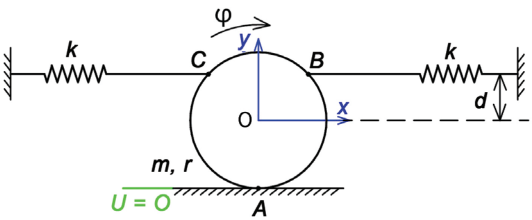
$$\delta L = (-F(t), 0)\cdot(-4l\sin\varphi\,\delta\varphi, 0) = 4F(t)\,l\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = 4F(t)\,l\sin\varphi$$

Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równanie ruchu:

$$\left(\frac{8}{3}ml^2 + 40ml^2\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} + 20ml^2\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 2mgl\cos\varphi = 4F(t)\,l\sin\varphi$$

Zadanie 4.4.
Walec znajdujący się na poziomej płaszczyźnie o masie m i promieniu r jest połączony z dwiema ścianami za pomocą sprężyn o sztywności k zamocowanych w odległości d powyżej środka, jak przedstawiono rys. 4.3. Walec wykonuje drgania. Wyznaczyć równanie różniczkowe ruchu tego walca oraz częstość kołową tych drgań.



Rys. 4.3. Mechanizm do zadania 4.4

Rozwiązanie:
Przedstawiony układ ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Można oczywiście przyjąć współrzędną uogólnioną x jako przemieszczenie środka walca. Walec wykonuje ruch płaski.

Energia kinetyczna walca, zgodnie z twierdzeniem Koeniga, jest sumą energii kinetycznej w ruchu obrotowym i energii kinetycznej związanej z prędkością środka masy, zatem:

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_O^2$$

Moment bezwładności walca wokół punktu O jest równy:

$$I_A = \frac{1}{2} m r^2$$

W punkcie A znajduje się chwilowy środek obrotu walca, zatem prędkość punktu O jest równa:

$$v_O = r\dot{\varphi}$$

Wstawiając wyliczoną prędkość i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna walca będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii sprężystości.

$$U = \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_C^2$$

Współrzędne x_B i x_C wyznaczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x_B = r\varphi + \sqrt{r^2 - d^2}$$

$$x_C = r\varphi - \sqrt{r^2 - d^2}$$

Wstawiając do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$U = \frac{1}{2} k \left(r\varphi + \sqrt{r^2 - d^2} \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(r\varphi - \sqrt{r^2 - d^2} \right)^2 = \frac{1}{2} k \left(2r^2\varphi^2 + 2r^2 - 2d^2 \right)$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 - k r^2 \varphi^2 - k r^2 + k d^2$$

Zapiszemy równanie Lagrange’a dla naszej współrzędnej uogólnionej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2 k r^2 \varphi$$

Na nasz walec działają tylko siły potencjalne, zatem współrzędna uogólniona Q_φ będzie równa zeru.

Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równanie ruchu:

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi} + 2 k r^2 \varphi = 0$$

Aby wyznaczyć częstość drgań naszego walca, doprowadzimy powyższe równanie do postaci oscylatora harmonicznego $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$, dzieląc stronami przez $\frac{3}{2} m r^2$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

Porównując, otrzymujemy:

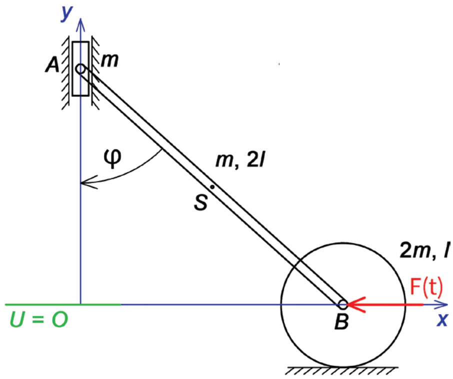
$$\omega^2 = \frac{4k}{3m}$$

zatem, częstość drgań jest równa:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

Zadanie 4.5.

W mechanizmie przedstawionym na rys. 4.4 pręt AB o długości $2l$ i masie m jest połączony przegubowo z walcem w punkcie B o promieniu r i masie $2m$, a w punkcie A z wodzikiem o masie m. Mechanizm porusza się pod wpływem siły $F(t)$ przyłożonej w punkcie B. Wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.4. Mechanizm do zadania 4.5

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 4.4 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Pręt AB wykonuje ruch płaski wokół punktu S, walec porusza się również ruchem płaskim, natomiast wodzik A porusza się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta AB, walca i energii kinetycznej wodzika A. Oznaczmy pręt AB jako (1), walec jako (2) i wodzik jako (3). Zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m v_B^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

Wyznaczymy momenty bezwładności pręta AB i walca odpowiednio wokół punktu S i punktu B:

$$I_S = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_B = \frac{1}{2} \cdot 2mr^2 = mr^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = 0 \qquad y_A = 2l \cos\varphi$$

$$\dot{x}_A = 0 \qquad \dot{y}_A = -2l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \left(-2l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_A^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$$

Współrzędne punktu B są równe:

$$x_B = 2l\sin\varphi \qquad y_B = 0$$

$$\dot{x}_B = 2l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = 0$$

Prędkość punktu C jest równa:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2$$

$$v_B^2 = \left(2l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_B^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi$$

Prędkość kątowa walca jest równa:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{v_B}{r}$$

$$\dot{\varphi}_k^2 = \frac{v_B^2}{r^2}$$

Współrzędne punktu S są równe:

$$x_S = l\sin\varphi \qquad y_S = l\cos\varphi$$

$$\dot{x}_S = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Prędkość punktu S jest równa:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2$$

$$v_S^2 = (l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (-l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2$$

$$v_S^2 = l^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)$$

$$v_S^2 = l^2\dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T=\frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mv_S^2+\frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_k^2+mv_B^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{v_B^2}{r^2}+mv_B^2+\frac{1}{2}m\cdot 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

$$T=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+2ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi+6ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$T=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+2ml^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi+cos^2\varphi\right)+4ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$T=\frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+4ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna walca będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości pręta AB i wodzika A.

$$U=mgy_A+mgy_S$$

$$U=2mgl\cos\varphi+mgl\cos\varphi$$

$$U=3mgl\cos\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L=T-U$$

$$L=\frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+4ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi-3mgl\cos\varphi$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszej współrzędnej uogólnionej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{16}{3}ml^2\dot{\varphi}+8ml^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\frac{16}{3}ml^2\ddot{\varphi}+8ml^2\left(-2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2+\cos^2\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right)$$

$$=\left(\frac{16}{3}ml^2+8ml^2\cos^2\varphi\right)\ddot{\varphi}-8ml^2\sin2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-8ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi+3mgl\sin\varphi=-4ml^2\dot{\varphi}^2\sin2\varphi+3mgl\sin\varphi$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, wyznaczmy siłę uogólnioną Q_φ:

$$\delta L = \boldsymbol{F}(\mathrm{t})\cdot\delta\boldsymbol{r}_B$$

$$\boldsymbol{r}_B = (2l\sin\varphi, 0)$$

$$\delta\boldsymbol{r}_C = (2l\cos\varphi\,\delta\varphi, 0)$$

$$\delta L = (-F(t), 0)\cdot(2\mathrm{l}\cos\varphi\cdot\delta\varphi, 0) = -2F(t)l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

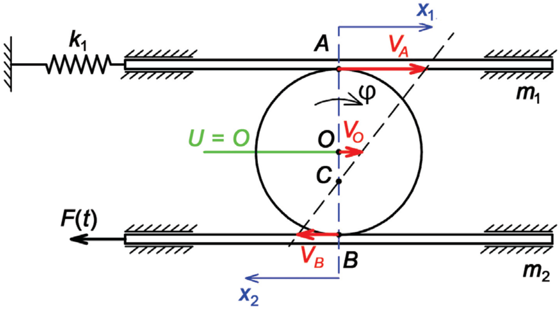
$$Q_\varphi = -F(t)l\cos\varphi$$

Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równanie ruchu:

$$\left(\frac{16}{3}ml^2+8ml^2\cos^2\varphi\right)\ddot{\varphi}-4ml\dot{\varphi}^2\sin2\varphi-3mg\sin\varphi=-2F(t)l\cos\varphi$$

Zadanie 4.6.

Zębatka w kształcie walca o masie m i promieniu porusza się między dwiema listwami odpowiednio o masach m_1 i m_2. Listwy są zazębione z zębatką, jak pokazano na rys. 4.5. Listwa górna połączona jest ze ścianą za pomocą sprężyny o sztywności k, a do dolnej listwy została przyłożona siła P. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, zapisać równania ruchu mechanizmu.



Rys. 4.5. Mechanizm do zadania 4.6

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.5 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione x_1, x_2. Listwy wykonują ruch postępowy, a zębatka porusza się ruchem płaskim.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej zębatki i obu listew. Oznaczmy walec O (zębatkę) jako (1), listwę górną jako (2) i dolną jako (3). Zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

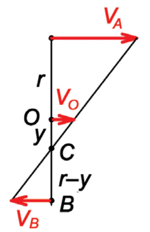
$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_O^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Moment bezwładności walca o środku O wokół jego środka jest równy:

$$I_O = \frac{1}{2} m r^2$$



Rys. 4.6. Zależności miedzy prędkościami poszczególnych punktów krążka

Korzystając z podobieństwa trójkątów przedstawionych na rys. 4.6, otrzymujemy podwójne równanie:

$$\frac{y}{v_O} = \frac{r+y}{v_A} = \frac{r-y}{v_B}$$

Z porównania wyrażenia drugiego i trzeciego możemy wyliczyć wartość y:

$$y = \frac{r\left(v_A - v_B\right)}{v_A + v_B}$$

Porównując dwa pierwsze wyrażenia i wykorzystując wcześniej wyliczoną wartość, wyznaczymy interesującą nas wielkość v_O:

$$yv_A = v_O\left(r+y\right)$$

$$\frac{rv_A\left(v_A - v_B\right)}{v_A + v_B} = v_O\left(r + \frac{r\left(v_A - v_B\right)}{v_A + v_B}\right)$$

$$v_A - v_B = 2v_O$$

$$v_O = \frac{v_A - v_B}{2}$$

Wiedząc, że $v_A = \dot{x}_1$ oraz $v_B = \dot{x}_2$, otrzymamy:

$$v_O = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}$$

W punkcie C znajduje się chwilowy środek obrotu walca, zatem możemy zapisać:

$$v_O = \dot{\varphi} y$$

Z tego równania wyznaczymy prędkość kątową walca:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2r}$$

Wstawiając wyliczone momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$T = \frac{1}{16}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{8}m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{16}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{8}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{4}m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{8}m\dot{x}_2^2$$
$$+\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$T = \frac{3}{16}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{8}m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{3}{16}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$T = \left(\frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m_1\right)\dot{x}_1^2 - \frac{1}{8}m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \left(\frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{x}_2^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna ciężkości walca o środku O będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej sprężystości oraz energii potencjalnej ciężkości obu listew.

$$U = \frac{1}{2}k\left(x_1\right)^2 + m_1 gr - m_2 gr$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \left(\frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m_1\right)\dot{x}_1^2 - \frac{1}{8}m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \left(\frac{3}{16}m + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1\right)^2 - m_1 gr + m_2 gr$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych x_1, x_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = Q_{x_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = Q_{x_2}$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \left(\frac{3}{8}m + m_1\right)\dot{x}_1 - \frac{1}{8}m\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \left(\frac{3}{8}m + m_1\right)\ddot{x}_1 - \frac{1}{8}m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \left(\frac{3}{8}m + m_2\right)\dot{x}_2 - \frac{1}{8}m\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \left(\frac{3}{8}m + m_2\right)\ddot{x}_2 - \frac{1}{8}m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, wyznaczymy wartość siły uogólnionej Q_{x_2} , gdyż $Q_{x_1} = 0$.

$$\delta L = \boldsymbol{F}(t) \cdot \delta \boldsymbol{r_B}$$

$$\boldsymbol{r_B} = (x_2, 0)$$

$$\delta \boldsymbol{r_B} = (\delta x_2, 0)$$

$$\delta L = (F(t), 0) \cdot (\delta x_2, 0) = F(t) \delta x_2$$

$$Q_{x_2} = F(t)$$

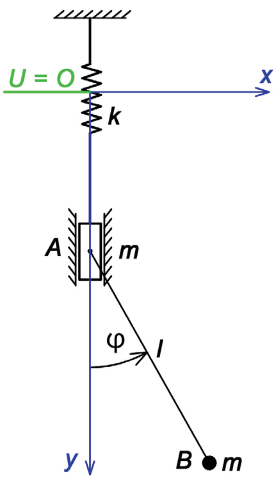
Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy następujące równania ruchu:

$$\left(\frac{3}{8}m + m_1\right)\ddot{x}_1 - \frac{1}{8}m\ddot{x}_2 + kx_1 = 0$$

$$\left(\frac{3}{8}m + m_2\right)\ddot{x}_2 - \frac{1}{8}m\ddot{x}_1 = F(t)$$

Zadanie 4.7.

Mechanizm przedstawiony na rys. 4.7 przedstawia wahadło z elastycznym zawieszeniem. Wodzik o masie zamocowany na sprężynie o stałej k może poruszać się w górę i w dół bez tarcia wzdłuż prowadnicy. Do wodzika przymocowana jest linka o długości l i zawieszone na niej ciało punktowe o masie m. Długość sprężyny nieodkształconej wynosi y_0. Wyznaczyć równania różniczkowe ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.7. Mechanizm do zadania 4.7

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.7 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione y, φ.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej wodzika A i masy B. Oznaczmy wodzik A jako (1), a masę B jako (2). Zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = 0 \qquad y_A = y$$
$$\dot{x}_A = 0 \qquad \dot{y}_A = \dot{y}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \dot{y}^2$$

Współrzędne punktu B są równe:

$$x_B = l\sin\varphi \qquad y_B = y + l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_B = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = \dot{y} - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu B jest równa:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2$$

$$v_B^2 = \left(l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{y} - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_B^2 = \dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{y}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

Wstawiając wyliczone prędkości do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{y}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)$$

$$T = m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m l^2\dot{\varphi}^2 - m l\dot{y}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą równolegle do osi *x* przez sprężynę. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości wodzika i masy B oraz energii potencjalnej sprężystości.

$$U = -mgy - mg\left(y + l\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)^2$$

$$U = -2mgy - mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{y}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + 2mgy + mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)^2$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = Q_y$$

Na nasz układ działają tylko siły potencjalne, zatem wszystkie siły uogólnione Q_y, Q_φ będą równe zero.

Obliczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} - ml\dot{y}\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} - ml\left(\ddot{y}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi\dot{\varphi}\right) = ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{y}\sin\varphi + ml\dot{y}\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -ml\dot{y}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{y}} = 2m\dot{y} - ml\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right) = 2m\ddot{y} - ml(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\cdot\ddot{\varphi})$$

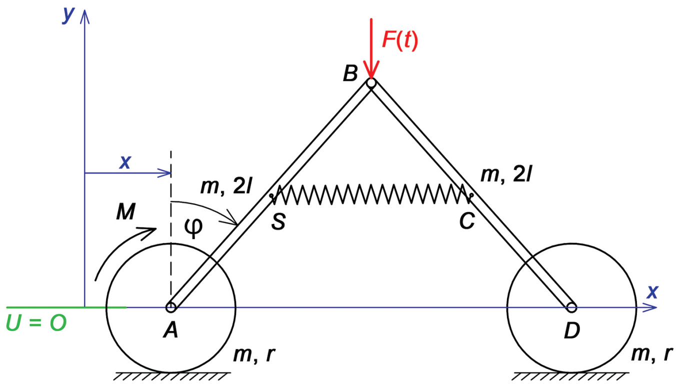
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2mg - \frac{1}{2}k\left(y - y_0\right)$$

Wstawiając otrzymane wartości do równań Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równania ruchu:

$$l\ddot{\varphi}-\ddot{y}\sin\varphi+2\dot{y}\cos\varphi\dot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

$$2m\ddot{y}-ml\left(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2+\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right)-2mg+\frac{1}{2}k\left(y-y_0\right)=0$$

Zadanie 4.8.
Dany jest mechanizm przedstawiony na rys. 4.8 składający się z dwóch prętów AB i BD o długości $2l$ i masie m, połączonych z jednej strony przegubowo w punkcie B, a z drugiej strony z walcem o promieniu r i masie m, odpowiednio w punktach A i D. Zaniedbujemy siły tarcia zapewniające toczenie. Środki prętów łączy sprężyna o sztywności k. Mechanizm porusza się pod wpływem siły $F(t)$ przyłożonej w punkcie B oraz przyłożonego momentu M do walca o środku w punkcie A. Wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.8. Mechanizm do zadania 4.8

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.8 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione x, φ. Pręty AB i BD wykonują ruch płaski, walce poruszają się również ruchem płaskim.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej prętów AB i BD oraz walców o środku w punkcie A i punkcie D. Oznaczmy walec A jako (1) pręt AB jako (2), pręt BD jako (3) i walec D jako (4). Zatem:

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4$$

$$T_1=\frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}_A^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$T_4 = \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}_D^2 + \frac{1}{2} m v_D^2$$

Wyznaczymy momenty bezwładności prętów AB, BD i walców A i D:

$$I_S = I_C = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_A = I_D = \frac{1}{2} m r^2$$

Prędkości kątowe $\dot{\varphi}_A$ i $\dot{\varphi}_D$ są równe:

$$\dot{\varphi}_A = \frac{\dot{x}_A}{r}$$

$$\dot{\varphi}_D = \frac{\dot{x}_D}{r}$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = x \qquad y_A = 0$$
$$\dot{x}_A = \dot{x} \qquad \dot{y}_A = 0$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \dot{x}^2$$

Współrzędne punktu S są równe:

$$x_S = x + l \sin\varphi \qquad y_S = l \cos\varphi$$
$$\dot{x}_S = \dot{x} + l \cos\varphi \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l \sin\varphi \dot{\varphi}$$

Prędkość punktu S jest równa:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2$$

$$v_S^2 = \left(\dot{x} + l \cos\varphi \dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l \sin\varphi \dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_S^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$v_S^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2$$

Współrzędne punktu C są równe:

$$x_C = x + 3l\sin\varphi \qquad y_C = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_C = \dot{x} + 3l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_C = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu C jest równa:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$$

$$v_C^2 = \left(\dot{x} + 3l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + 6l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 9l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + 6l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 8l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + 6l\dot{x}\cos\varphi\,\dot{\varphi} + 8l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\varphi}^2$$

Współrzędne punktu D są równe:

$$x_D = x + 4l\sin\varphi \qquad y_D = 0$$
$$\dot{x}_D = \dot{x} + 4l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_D = 0$$

Prędkość punktu D jest równa:

$$v_D^2 = \dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2$$

$$v_D^2 = \left(\dot{x} + 4l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_D^2 = \dot{x}^2 + 8l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 16l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}_A^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\varphi}_D^2 + \frac{1}{2}mv_D^2$$

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right) + \\ & + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 6l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 8l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right) + \\ & + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{\dot{x}_D^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_D^2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 +$$
$$+\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 3ml\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 4ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_D^2$$

$$T = \frac{7}{4}m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 4ml\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 4ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 +$$
$$+\frac{3}{4}m\left(\dot{x}^2 + 8l\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 16l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\right)$$

$$T = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 10ml\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 16ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi. Zatem energia potencjalna obu walców będzie równa zeru, gdyż leżą one na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości obu prętów oraz energii sprężystości.

$$U = \frac{1}{2}k\left(x_C - x_S\right)^2 + mgy_S + mgy_C$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x + 3l\sin\varphi - x - l\sin\varphi\right)^2 + mgl\cos\varphi + mgl\cos\varphi$$

$$U = 2kl^2\sin^2\varphi + 2mgl\cos\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 10ml\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} + 16ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 - 2kl^2\sin^2\varphi - 2mgl\cos\varphi$$

Zapiszemy równania Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi} + 10ml\dot{x}\cos\varphi + 32ml^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{8}{3}ml^2\ddot{\varphi} + 10ml\left(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi\dot{\varphi}\right)$$
$$+32ml^2\left(-2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \cos^2\varphi\ddot{\varphi}\right) =$$
$$= 8ml^2\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{3} + 4\cos^2\varphi\right) + 10ml\ddot{x}\cos\varphi - 10ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$-32ml^2\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + 32ml^2\cos^2\varphi\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -10ml\dot{x}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - 32ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - 4kl^2\sin\varphi\cos\varphi + 2mgl\sin\varphi =$$
$$= -10ml\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - 16ml^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi - 2kl^2\sin 2\varphi + 2mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 5m\dot{x} + 10ml\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 5m\ddot{x} + 10ml\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) =$$
$$= 5m\ddot{x} - 10ml\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 10ml\cos\varphi\,\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, wyznaczmy siłę uogólnioną Q_φ i Q_x:

$$\delta L = M\delta\varphi + \boldsymbol{F}(t)\cdot\delta\boldsymbol{r_B}$$

$$\boldsymbol{r_B} = \left(x + 2l\sin\varphi, 2l\cos\varphi\right)$$

$$\delta\boldsymbol{r_C} = \left(\delta x + 2l\cos\varphi\,\delta\varphi, -2l\sin\varphi\,\delta\varphi\right)$$

$$\delta L = M\delta\varphi + \left(0, -F(t)\right)\cdot\left(\delta x + 2l\cos\varphi\delta\varphi, -2l\sin\varphi\delta\varphi\right) =$$
$$= 0\delta x + \left(M + 2F(t)l\sin\varphi\right)\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = M + 2F(t)l\sin\varphi$$

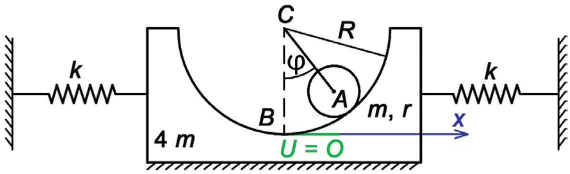
$$Q_x = 0$$

Wstawiając otrzymane wartości do równań Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równania ruchu:

$$8ml^2\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{3} + 8\cos^2\varphi\right) + 10ml\ddot{x}\cos\varphi - 16ml^2\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2kl^2\sin 2\varphi - 2mgl\sin\varphi =$$
$$= M + 2F(t)l\sin\varphi$$

$$5m\ddot{x} - 10ml\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + ml\cos\varphi\,\ddot{\varphi} = 0$$

Zadanie 4.9.
Wewnątrz platformy o masie $4m$, przymocowanej z obu stron do ściany za pomocą sprężyn o stałych sprężystości k, znajduje się cylindryczne wgłębienie o promieniu R. Wewnątrz tego wgłębienia porusza się walec o masie m i promieniu r. Mechanizm ten przedstawiono na rys. 4.9. Stosując równania Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równania ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.9. Mechanizm do zadania 4.9

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.9 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione x, φ, gdzie φ – kąt obrotu walca wokół punktu C. Walec wykonuje ruch złożony po powierzchni cylindrycznej platformy o promieniu R, a platforma porusza się ruchem postępowym.

Oznaczmy przez kąt obrotu walca wokół swojego środka, czyli punktu A. Korzystając z zależności między drogą, która w naszym przypadku jest łukiem BD, a kątami α i φ, mamy:

$$BD = \varphi R = \alpha r$$

$$\alpha = \frac{R}{r}\varphi$$

$$\dot{\alpha} = \frac{R}{r}\dot{\varphi}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{R}{r}\ddot{\varphi}$$

Walec posiada dwie prędkości kątowe, zatem kąt obrotu jest równy $\alpha - \varphi$. Z tej informacji skorzystamy, zapisując energię kinetyczną walca w ruchu obrotowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej walca i platformy. Oznaczmy walec jako (1) i platformę jako (2), zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 4m\dot{x}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_A \left(\dot{\alpha} - \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} m v_A^2$$

Moment bezwładności walca wokół punktu A jest równy:

$$I_A = \frac{1}{2} m r^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = x + \left(R - r\right)\sin\varphi \qquad y_A = R - \left(R - r\right)\cos\varphi$$
$$\dot{x}_A = \dot{x} + \left(R - r\right)\cos\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_A = \left(R - r\right)\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu S jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \left(\dot{x} + \left(R - r\right)\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\left(R - r\right)\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + 2\left(R - r\right)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \left(R - r\right)^2 \dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczoną prędkość i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} 4 m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_A \left(\dot{\alpha} - \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$T = 2 m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \left(\frac{R}{r}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2\left(R - r\right)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \left(R - r\right)^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

$$T = \frac{5}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m\left(R - r\right)^2 \dot{\varphi}^2 + m\left(R - r\right)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna platformy będzie równa zero, gdyż jej środek (przyjmujemy w punkcie B) leży na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości walca i energii sprężystości.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x^2 + m g\left(R - \left(R - r\right)\cos\varphi\right)$$

$$U = k x^2 + m g R - m g\left(R - r\right)\cos\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{5}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + m(R-r)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - kx^2 - mgR + mg(R-r)\cos\varphi$$

Zapiszemy równania Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x$$

Na nasz układ działają tylko siły potencjalne, zatem wszystkie siły uogólnione Q_x, Q_φ będą równe zero.

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi} + m(R-r)\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + m(R-r)\left(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + m(R-r)\ddot{x}\cos\varphi - m(R-r)\dot{x}\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -m(R-r)\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - mg(R-r)\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 5m\dot{x} + m(R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = 5m\ddot{x} + m(R-r)\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) =$$

$$= 5m\ddot{x} + m(R-r)\ddot{\varphi}\cos\varphi - m(R-r)\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

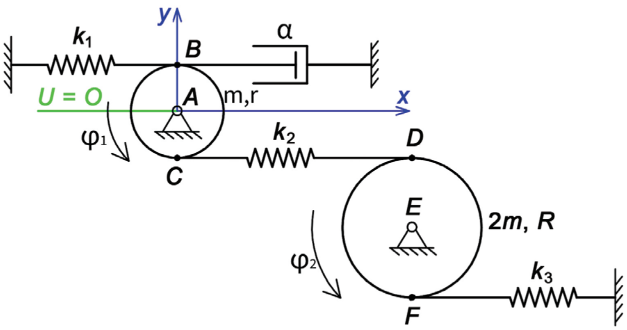
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx$$

Wstawiając otrzymane wartości do równań Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równania ruchu:

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + m(R-r)\ddot{x}\cos\varphi + mg(R-r)\sin\varphi = 0$$

$$5m\ddot{x} + m(R-r)\ddot{\varphi}\cos\varphi - m(R-r)\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2kx = 0$$

Zadanie 4.10.
Na rys. 4.10 przedstawiono mechanizm składający się z dwóch jednorodnych walców połączonych sprężynami i tłumikiem. Pierwszy o środku A, masie m i promieniu r połączony jest sprężyną o sztywności k_1 oraz tłumikiem o współczynniku tłumienia α ze ścianą i sprężyną o sztywności k_2 z jednorodnym walcem o środku E, masie $2m$ i promieniu R. Drugi walec dodatkowo jest połączony sprężyną o sztywności k_3 ze ścianą. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, zapisać równania ruchu mechanizmu.



Rys. 4.10. Mechanizm do zadania 4.10

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.10 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione φ_1, φ_2. Walce wykonują ruch obrotowy odpowiednio wokół punktu A i punktu E.

Moment bezwładności walca o środku A wokół jego środka jest równy:

$$I_A = \frac{1}{2} m r^2$$

Moment bezwładności walca o środku E wokół jego środka jest równy:

$$I_E = mR2$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej obu walców. Oznaczmy walec A jako (1) i walec o środku B jako (2). Zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_E \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_2^2$$

Wstawiając wyliczone momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_2^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna ciężkości walca o środku A będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej sprężystości oraz energii potencjalnej ciężkości walca o środku w punkcie E.

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(x_B \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_C - x_D \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(x_F \right)^2 - 2mg \left(R + r \right)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 \left(\varphi_1 r \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\varphi_1 r - \varphi_2 R \right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(\varphi_2 R \right)^2 - 2mg \left(R + r \right)$$

Funkcja dyssypacji energii jest równa:

$$D = \frac{1}{2} \alpha \left(r \dot{\varphi}_1 \right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 \left(\varphi_1 r \right)^2 - \frac{1}{2} k_2 \left(\varphi_1 r - \varphi_2 R \right)^2 - \frac{1}{2} k_3 \left(\varphi_2 R \right)^2 \\ + 2mg \left(R + r \right)$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych, przyjmując od razu siły uogólnione równe zero, gdyż na nasz układ działają tylko siły potencjalne:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0$$

Obliczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=-k_1r^2\varphi_1-k_2\left(\varphi_1 r-\varphi_2 R\right)r=-r^2\varphi_1\left(k_1+k_2\right)+k_2Rr\varphi_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1}=\alpha r^2\dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}=mR^2\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=mR^2\ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=-k_2\left(\varphi_1 r-\varphi_2 R\right)\left(-R\right)-k_3\left(\varphi_2 R\right)R=k_2Rr\varphi_1-R^2\varphi_2\left(k_2+k_3\right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2}=0$$

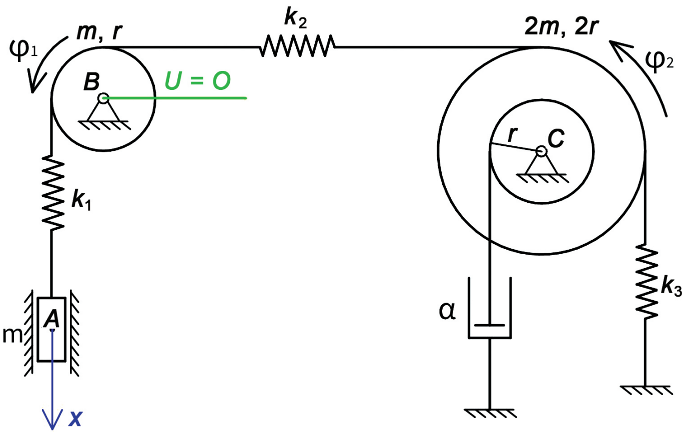
Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy następujące równania ruchu:

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1+r^2\varphi_1\left(k_1+k_2\right)-k_2Rr\varphi_2+\alpha r^2\dot{\varphi}_1=0$$

$$mR^2\ddot{\varphi}_2-k_2Rr\varphi_1+R^2\varphi_2\left(k_2+k_3\right)=0$$

Zadanie 4.11.

Jednorodny walec o środku B, masie m i promieniu r połączony jest z jednorodnym współśrodkowym walcem o środku C, momencie bezwładności względem środka C równym $I_C=\frac{5}{2}mr^2$ i wodzikiem A o masie za pomocą sprężyn o sztywnościach odpowiednio k_1, k_2. Do walca o środku C dołączona jest sprężynka o sztywności k_3 i tłumik o współczynniku tłumienia α. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, zapisać równania ruchu układu przedstawionego na rys. 4.11.



Rys. 4.11. Mechanizm do zadania 4.11

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 4.11 ma trzy stopnie swobody, przyjmijmy zatem trzy współrzędne uogólnione φ_1, φ_2, x. Walce wykonują ruch obrotowy odpowiednio wokół punktu B i C, zaś wodzik A porusza się ruchem postępowym wzdłuż osi x.

Moment bezwładności walca o środku B wokół jego środka jest równy:

$$I_B = \frac{1}{2}mr^2$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej obu walców i energii kinetycznej wodzika A. Oznaczmy wodzik A jako (1), walec o środku B jako (2) oraz walec o środku C jako (3). Zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_1^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}_2^2 = \frac{5}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

Wstawiając wyliczone momenty bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{5}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt B. Zatem energia potencjalna ciężkości walca o środku B będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej sprężystości obu walców oraz energii potencjalnej ciężkości walca o środku w punkcie C i wodzika A.

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(x - \varphi_1 r\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\varphi_1 r - \varphi_2 2r\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(\varphi_2 2r\right)^2 - 2mgr - mg\left(l + x\right)$$

gdzie l – odległość punktu A od linii zerowego potencjału w chwili początkowej.

Funkcja dyssypacji energii jest równa:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(r\dot{\varphi}_2\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{5}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\left(x - \varphi_1 r\right)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(\varphi_1 r - \varphi_2 2r\right)^2$$
$$- \frac{1}{2}k_3\left(\varphi_2 2r\right)^2 + 2mgr + mg\left(l + x\right)$$

Zapiszemy równanie Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} = Q_{\varphi_2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} = Q_{\varphi_2}$$

Na nasz układ działają tylko siły potencjalne, zatem wszystkie siły uogólnione Q_x, $Q_{ö_1}$, $Q_{ö_2}$, będą równe zeru.

Obliczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_1\left(x - \varphi_1 r\right) + mg$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -k_1\left(x - \varphi_1 r\right)\left(-r\right) - k_2\left(\varphi_1 r - \varphi_2 2r\right)r =$$
$$= k_1 rx - \left(k_1 + k_2\right)r^2\varphi_1 + 2k_2 r^2\varphi_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{5}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -k_2\left(\varphi_1 r - \varphi_2 2r\right)\left(-2r\right) - k_3\left(\varphi_2 2r\right)2r = 2k_2 r^2\varphi_1 - 4\left(k_2 + k_3\right)r^2\varphi_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} = \alpha r^2\dot{\varphi}_2$$

Wstawiając otrzymane wartości do równania Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy następujące równania ruchu:

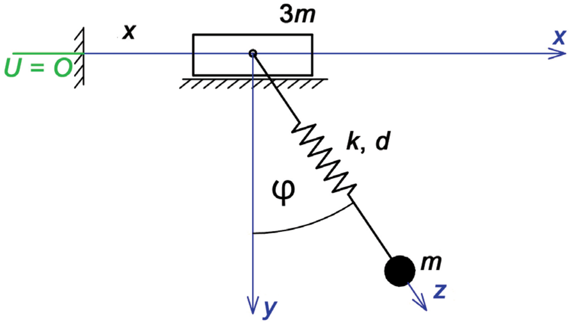
$$m\ddot{x} + k_1\left(x - \varphi_1 r\right) - mg = 0$$

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1 - k_1 rx + \left(k_1 + k_2\right)r^2\varphi_1 - 2k_2 r^2\varphi_2 = 0$$

$$\frac{5}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2 - 2k_2 r^2\varphi_1 + 4\left(k_2 + k_3\right)r^2\varphi_2 + \alpha r^2\dot{\varphi}_2 = 0$$

Zadanie 4.12.

Masa m zawieszona jest na sprężynie o stałej sprężystości k, długość nieodkształconej sprężyny wynosi d. Masa ta wykonuje oprócz podłużnych drgań ruch wahadłowy. Sprężyna przymocowana jest do klocka o masie $3m$, który może wykonywać ruch postępowy pod wpływem przyłożonej siły $F(t)$. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, zapisać różniczkowe równania ruchu dla mechanizmu przedstawionego na rys. 4.12.



Rys. 4.12. Mechanizm do zadania 4.12

Rozwiązanie:

Mechanizm przedstawiony na rys. 4.12 ma trzy stopnie swobody, przyjmijmy zatem trzy współrzędne uogólnione φ, x, z.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej klocka A i masy punktowej B. Oznaczmy klocek A jako (1) i masę B jako (2). Zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 3mv_A^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} mv_B^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = x \qquad y_s = 0$$
$$\dot{x}_A = \dot{x} \qquad \dot{y}_A = 0$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \dot{x}^2$$

Współrzędne punktu B są równe:

$$x_B = x + z\sin\varphi \qquad y_B = z\cos\varphi$$
$$\dot{x}_B = \dot{x} + \dot{z}\sin\varphi + z\cos\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = \dot{z}\cos\varphi - z\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu B jest równa:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2$$

$$v_B^2 = \left(\dot{x} + \dot{z}\sin\varphi + z\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{z}\cos\varphi - z\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_B^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{z}\sin\varphi + 2\dot{x}z\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

Wstawiając wyliczone prędkości do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{3}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{z}\sin\varphi + 2\dot{x}z\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)$$

$$T = 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mz^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{x}\dot{z}\sin\varphi + m\dot{x}z\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi x. Zatem energia potencjalna klocka A będzie równa zero, gdyż leży on na linii zerowego potencjału. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości masy B i energii potencjalnej sprężystości.

$$U = -mgy_B + \frac{1}{2}k\left(z-d\right)^2$$

$$U = -mgz\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(z-d\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U$$

$$L = 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mz^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{x}\dot{z}\sin\varphi + m\dot{x}z\cos\varphi\,\dot{\varphi} + mgz\cos\varphi$$
$$-\frac{1}{2}k\left(z-d\right)^2$$

Zapiszemy równania Lagrange'a dla naszych współrzędnych uogólnionych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=Q_z$$

Obliczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mz^2\dot{\varphi}+m\dot{x}z\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=m\left(2z\dot{z}\dot{\varphi}+z^2\ddot{\varphi}\right)+m\left(\ddot{x}z\cos\varphi+\dot{x}\dot{z}\cos\varphi-\dot{x}z\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=m\dot{x}\dot{z}\cos\varphi-m\dot{x}z\sin\varphi\,\dot{\varphi}-mgz\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=4m\dot{x}+m\dot{z}\sin\varphi+mz\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=4m\ddot{x}+m\left(\ddot{z}\sin\varphi+\dot{z}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)$$
$$+m\left(\dot{z}\cos\varphi\dot{\varphi}-z\sin\varphi\dot{\varphi}^2+z\cos\varphi\ddot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}+m\dot{x}\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)=m\ddot{z}+m\left(\ddot{x}\sin\varphi+\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=mz\dot{\varphi}^2+m\dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi}+mg\cos\varphi-k\left(z-d\right)$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych, wyznaczmy siłę uogólnioną Q_x:

$$\delta L = F(t) \cdot \delta \boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{r}_A = (x, 0)$$

$$\delta \boldsymbol{r}_A = (\delta x, 0)$$

$$\delta L = (F(t), 0) \cdot (\delta x, 0) = F(t)\, \delta x$$

$$Q_x = F(t)$$

Wstawiając otrzymane wartości do równań Lagrange'a II rodzaju, po redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy równania ruchu:

$$2z\dot{z}\dot{\varphi} + z^2\ddot{\varphi} + \ddot{x}z\cos\varphi + gz\sin\varphi = 0$$

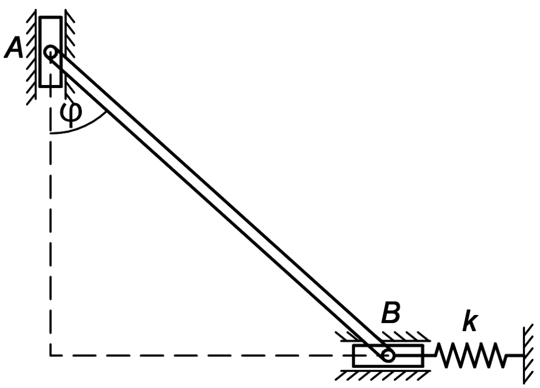
$$m\left(4\ddot{x} + \ddot{z}\sin\varphi + 2\dot{z}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - z\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + z\cos\varphi\ddot{\varphi}\right) = F\left(t\right)$$

$$m\left(\ddot{z} + \ddot{x}\sin\varphi - z\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi\right) + k\left(z - d\right) = 0$$

4.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

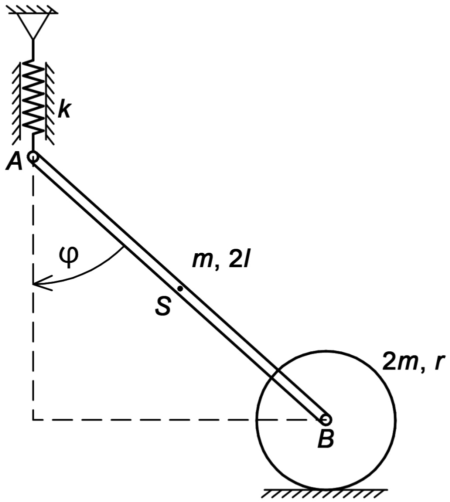
Zadanie 4.13.

Końce pręta AB o masie m i długości $2l$ połączone są suwakami o masie m. Do suwaka B zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności k, jak pokazano na rys. 4.13. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



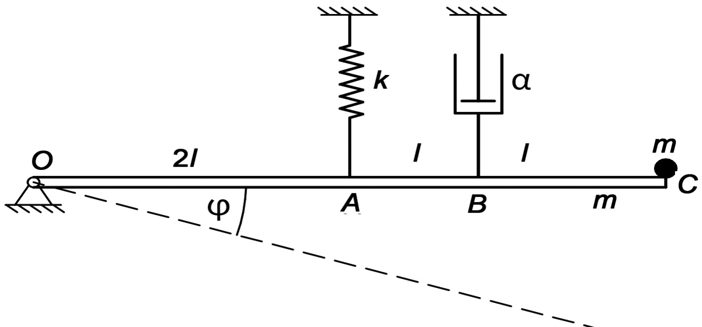
Rys. 4.13. Mechanizm do zadania 4.13

Zadanie 4.14.
W mechanizmie przedstawionym na rys. 4.14 pręt AB o długości $2l$ i masie m jest połączony przegubowo z walcem w punkcie B o promieniu r i masie $2m$, a w punkcie A ze sprężyną o współczynniku sztywności k. Sprężyna może wykonywać ruch tylko w pionie. Wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.14. Mechanizm do zadania 4.14

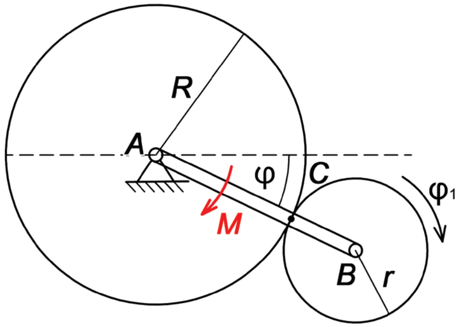
Zadanie 4.15.
Do pręta OC o masie m i długości $4l$ zamocowanego na podporze stałej przegubowej dołączono sprężynę o współczynniku sztywności k, tłumik o współczynniku tłumienia α oraz masę m, jak na rys. 4.15. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



Rys. 4.15. Mechanizm do zadania 4.15

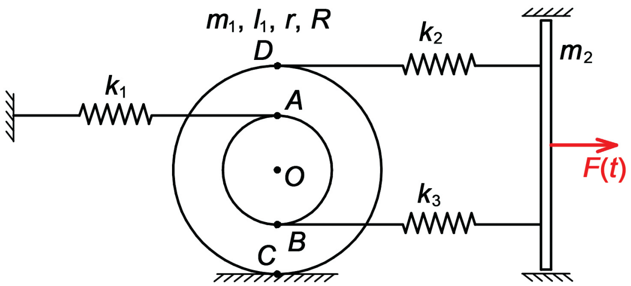
Zadanie 4.16.
Po nieruchomym krążku o promieniu R, zamocowanym w punkcie A może toczyć się bez poślizgu drugi krążek o masie m_1 i promieniu r. Krążki połączone są prętem

AB o masie m_2, do którego przyłożony jest moment M. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu mechanizmu przedstawionego na rys. 4.16.



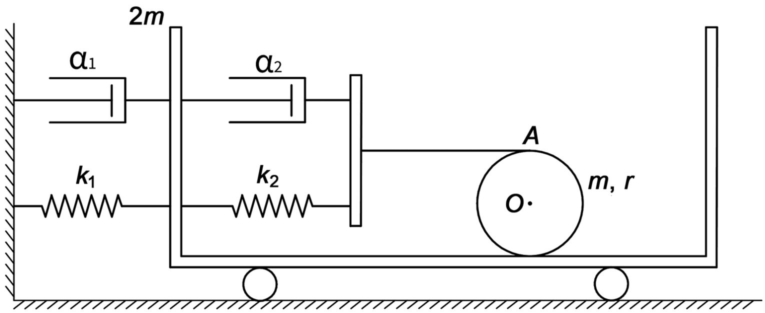
Rys. 4.16. Mechanizm do zadania 4.16

Zadanie 4.17.
Walec współśrodkowy o środku O, masie m_1, momencie bezwładności I_1, promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R znajduje się na gładkiej powierzchni, jak na rys. 4.17. Walec połączony jest za pomocą sprężyn o współczynnikach sztywności k_1, k_2, k_3 ze ścianą oraz z prętem o masie m_2, który może wykonywać tylko ruch postępowy. Mechanizm wprawiany jest w ruch za pomocą siły $F(t)$ przyłożonej do pręta. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



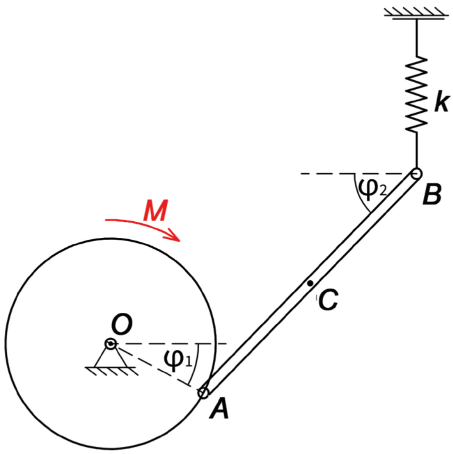
Rys. 4.17. Mechanizm do zadania 4.17

Zadanie 4.18.
Na wózku o masie $m_2 = 2m$ umieszczono walec o masie m i promieniu r, który połączono z wózkiem za pomocą sprężyny o współczynniku sztywności k_2 i tłumika o współczynniku tłumienia α_2. Wózek połączono ze ścianą za pomocą sprężyny o współczynniku sztywności k_1 i tłumika o współczynniku tłumienia α_1, jak pokazano na rys. 4.18. Zakładamy brak tarcia między walcem i wózkiem oraz wózkiem a podłożem oraz toczenie bez poślizgu. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równanie ruchu tego mechanizmu.



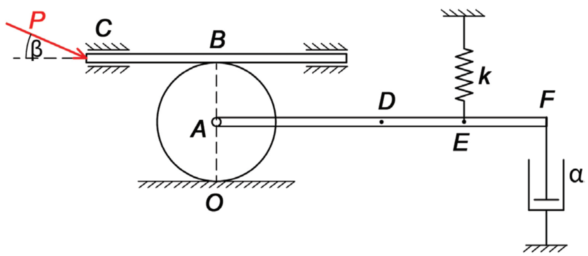
Rys. 4.18. Mechanizm do zadania 4.18

Zadanie 4.19.
Jednorodny krążek o masie *m* i promieniu *r* zamocowany jest na podporze stałej przegubowej w punkcie O, jak na rys. 4.19. Krążek połączony jest przegubowo z jednorodnym prętem o masie 2*m* i długości 2*l*, którego koniec przymocowany jest do sprężyny o współczynniku sztywności *k*, która może rozciągać się tylko w pionie. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równania ruchu tego mechanizmu.



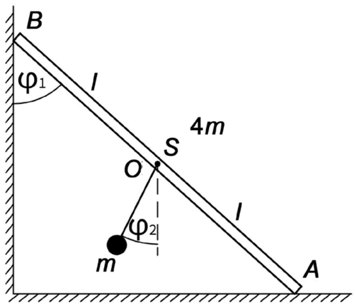
Rys. 4.19. Mechanizm do zadania 4.19

Zadanie 4.20.
Jednorodny walec o masie 2*m* i promieniu *r* toczy się między płaszczyzną a prętem o masie *m*, który może poruszać się poziomo. Walec połączony jest przegubowo z jednorodnym prętem o masie *m* i długości 4*r*, który przymocowany jest do sprężyny o współczynniku sztywności *k* oraz do tłumika o współczynniku tłumienia α, jak na rys. 4.20. Układ porusza się pod wpływem siły *P* przyłożonej do belki pod kątem β. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równania ruchu tego mechanizmu.



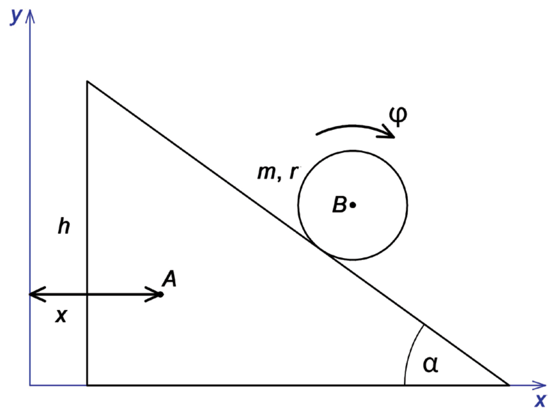
Rys. 4.20. Mechanizm do zadania 4.20

Zadanie 4.21.
Belka AB o masie $4m$ i długości $2l$ oparta jest o gładką powierzchnię. W środku belki zamocowano, jak pokazano na rys. 4.21, wahadło matematyczne o masie m. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równania ruchu układu ciał.



Rys. 4.21. Mechanizm do zadania 4.21

Zadanie 4.22.
Po klinie o masie $m_1 = 12m$, kącie nachylenia α i wysokości h poruszającym się po gładkiej powierzchni stacza się bez poślizgu jednorodny walec o masie m i promieniu r. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, wyznaczyć różniczkowe równania ruchu tego mechanizmu, przedstawionego na rys. 4.22.



Rys. 4.22. Mechanizm do zadnia 4.22

V. POŁOŻENIE RÓWNOWAGI

5.1. RÓWNOWAGA W ZACHOWAWCZYM POLU SIŁ

Rozważmy układ materialny poddany więzom idealnym, który znajduje się w zachowawczym polu sił. Składowe siły $\boldsymbol{P_i}$ przyłożonej do punktu $A_i(x_i, y_i, z_i)$ możemy wyrazić jako pochodne energii potencjalnej po odpowiednich współrzędnych prostokątnych:

$$P_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$$P_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$P_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

Załóżmy, że położenie rozważanego układu można określić za pomocą współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Podstawiając składowe siły $\boldsymbol{P_i}$ do wzoru na siłę uogólnioną, otrzymujemy:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{5.1}$$

Wiemy, że dla układu nieswobodnego znajdującego się w zachowawczym polu sił w położeniu równowagi wszystkie siły uogólnione muszą być równe zeru, zatem:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \tag{5.2}$$

Otrzymane warunki są jednocześnie warunkami występowania ekstremum funkcji $U(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, czyli funkcji energii potencjalnej, zależnej od współrzędnych uogólnionych.

Układ materialny w zachowawczym polu sił, poddany więzom idealnym znajduje się w położeniu równowagi, gdy energia potencjalna tego układu spełnia warunki konieczne do istnienia ekstremum, czyli:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}_s} = 0$$

5.2. RODZAJE RÓWNOWAGI

Jeżeli ciało znajduje się w położeniu równowagi, w którym energia osiąga minimum, to wychylone nieznacznie z położenia równowagi zacznie wykonywać małe drgania, które będą tym mniejsze, im mniejsze było wychylenie początkowe. Tego rodzaju równowaga nosi nazwę **równowagi stałej**.

Jeżeli ciało znajduje się w położeniu równowagi, w którym energia osiąga maksimum, to wychylone nieznacznie z położenia równowagi samoczynnie pogłębi to wychylenie (nie wystąpią drgania). Tego rodzaju równowaga nosi nazwę **równowagi niestałej (chwiejnej)**.

Jeżeli energia potencjalna ciała ma taką samą wartość we wszystkich położeniach, a przy wychyleniu z położenia równowagi energia potencjalna się nie zmienia, to taki rodzaj równowagi nazywamy **równowagą obojętną**.

5.3. ZASADA DIRICHLETA

Zasadę Dirichleta możemy sformułować następująco:

Układ materialny w zachowawczym polu sił, poddany więzom idealnym, znajduje się w położeniu równowagi stałej, gdy energia potencjalna tego układu osiąga minimum.

Dla układu o jednym stopniu swobody kryterium to przyjmie postać:

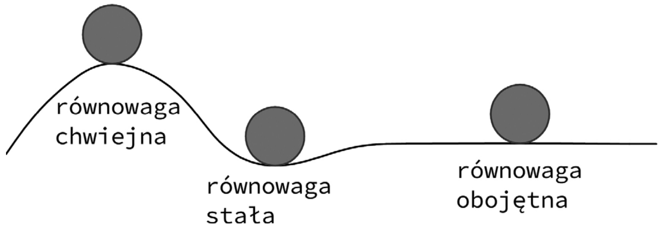
$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} > 0$$

Dla układu o dwóch stopniach swobody kryterium to przyjmie postać:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 > 0$$

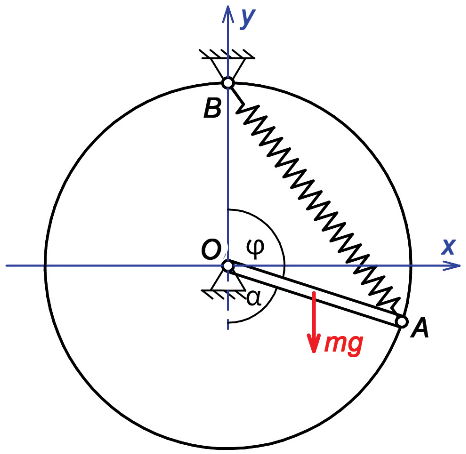
$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} > 0$$



Rys. 5.1. Graficzna interpretacja równowagi

5.4. ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

Zadanie 5.1.
Znaleźć położenie równowagi i określić rodzaj równowagi jednorodnego pręta OA o masie m i długości l zamocowanego przegubowo w punkcie O, jak pokazano na rys. 5.2. Koniec pręta, czyli punkt A zamocowany jest do sprężyny o sztywności k, która w postaci nieodkształconej ma długość l.



Rys. 5.2. Mechanizm do zadania 5.1

Rozwiązanie:
Pręt ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Zauważmy, że $\alpha = 180° - \varphi$.

Energia potencjalna pręta, jeśli przyjmiemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O, jest równa:

$$U = -\frac{1}{2} mgl\cos\alpha + \frac{1}{2} k\left(|\mathrm{AB}| - l\right)^2$$

Długość |AB| obliczymy, korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AOB:

$$\left|\mathrm{AB}\right|^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\varphi$$

$$\left|\mathrm{AB}\right| = l\sqrt{2-2\cos\varphi}$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta możemy zapisać:

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

zatem:

$$\left|\mathrm{AB}\right| = l\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)} = 2l\sin\frac{\varphi}{2}$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U = -\frac{1}{2}mgl\cos\left(180^\circ-\varphi\right) + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\frac{\varphi}{2} - l\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2}mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kl^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}mgl\sin\varphi + kl^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{2}$$

W położeniu równowagi $\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$, zatem:

$$-\frac{1}{2}mgl\sin\varphi + kl^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$-mgl\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2kl^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - kl^2\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(-mgl\sin\frac{\varphi}{2} + 2kl^2\sin\frac{\varphi}{2} - kl^2\right) = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad -mgl\sin\frac{\varphi}{2} + 2kl^2\sin\frac{\varphi}{2} - kl^2 = 0$$

$$\varphi = \pi \quad \text{lub} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{kl^2}{2kl^2 - mgl}$$

$$\varphi_1 = \pi \quad \text{lub} \quad \varphi_2 = 2\arcsin\left(\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl}\right)$$

Wiedząc, że $\sin\frac{\varphi}{2} < 1$, więc $\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl} < 1$, czyli $mg > kl$.

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} mgl\cos\varphi + kl^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}kl^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=\pi} = \frac{1}{2}mgl - \frac{1}{2}kl^2 < 0$$

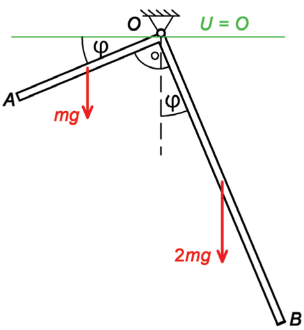
W położeniu $\varphi_1 = \pi$ mamy równowagę niestałą, czyli położenie pręta jest niestabilnym położeniem równowagi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2} = -\frac{1}{2}mgl\left(1 - 2\left(\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl}\right)^2\right) + kl^2\left(1 - \left(\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl}\right)^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}kl^2\left(2\left(\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl}\right) - 1\right)\frac{kl^2}{2kl^2 - mgl} > 0$$

Dla położenia φ_2 mamy równowagę stałą, czyli położenie pręta jest stabilnym położeniem równowagi.

Zadanie 5.2.

Znaleźć położenie równowagi i określić rodzaj równowagi jednorodnego pręta w kształcie litery L zamocowanego przegubowo w punkcie O, jak na rys. 5.3. Długość pręta OA wynosi l, jego masa m, długość pręta OB wynosi $2l$. Pręt znajduję się w polu grawitacyjnym.



Rys. 5.3. Mechanizm do zadania 5.2

Rozwiązanie:
Pręt ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O. Energia potencjalna pręta jest równa:

$$U = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi - 2mgl\cos\varphi$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}mgl\cos\varphi + 2mgl\sin\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, zatem:

$$-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi + 2mgl\sin\varphi = 0$$

Dzieląc stronami przez *mgl*, otrzymujemy:

$$-\frac{1}{2}\cos\varphi + 2\sin\varphi = 0$$

Wiedząc, że $\cos\varphi \neq 0$, możemy podzielić stronami przez $\cos\varphi$:

$$-\frac{1}{2} + 2\operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4}$$

Tangens jest dodatni w pierwszej i trzeciej ćwiartce, więc mamy dwa rozwiązania:

$$\varphi_1 = 14° = \frac{7\pi}{90} \quad \text{lub} \quad \varphi_2 = 180° + 14° = 194° = \frac{97\pi}{90}$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2}mgl\sin\varphi + 2mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=\frac{7\pi}{90}} = \frac{1}{2}mgl\sin\frac{7\pi}{90} + 2mgl\cos\frac{7\pi}{90} > 0$$

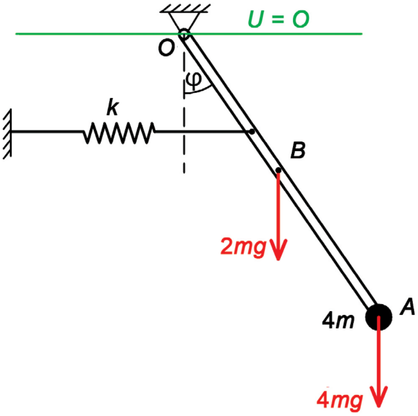
W położeniu $\varphi_1 = \frac{7\pi}{90}$ mamy równowagę stałą, czyli położenie pręta jest stabilnym położeniem równowagi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{97\pi}{90}} = \frac{1}{2} mgl \sin\frac{97\pi}{90} + 2mgl\cos\frac{97\pi}{90} < 0$$

Dla położenia $\varphi_2 = \frac{97\pi}{90}$ mamy równowagę niestałą (funkcje sin i cos w trzeciej ćwiartce są ujemne, więc $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{97\pi}{90}} < 0$, czyli położenie pręta jest niestabilnym położeniem równowagi.

Zadanie 5.3.

Znaleźć położenie równowagi i określić rodzaj równowagi jednorodnego pręta OA o długości $3l$ i masie $2m$ zamocowanego przegubowo w punkcie O, na końcu którego umieszczona jest masa punktowa o wartości $4m$, jak na rys. 5.4. W jednej trzeciej długości pręta, licząc od punktu O, zamocowana jest sprężynka o współczynniku sztywności k. Sprężyna jest nieodkształcona w przypadku, gdy pręt OA znajduje się w położeniu pionowym.



Rys. 5.4. Mechanizm do zdania 5.3

Rozwiązanie:

Układ ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O. Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości dla masy $4m$ oraz dla pręta oraz energii potencjalnej sprężystości:

$$U = -4mg3l\cos\varphi - 2mg\frac{3}{2}l\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi\right)^2 = -15mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kl^2\sin^2\varphi$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -15mgl\sin\varphi + kl^2\sin\varphi\cos\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, a więc:

$$\sin\varphi\left(-15mgl + kl^2\cos\varphi\right) = 0$$

zatem:

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\varphi = \frac{15mg}{kl}$$

Pierwsze równanie sin φ = 0 ma dwa rozwiązania:

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{lub} \quad \varphi_2 = \pi$$

W drugim równaniu $\cos\varphi = \frac{15mg}{kl}$ funkcja cosinus przyjmuje wartość dodatnią w pierwszej i czwartej ćwiartce, zatem:

$$\varphi_3 = \text{arc}\cos\left(\frac{15mg}{kl}\right) \quad \text{lub} \quad \varphi_4 = 2\pi - \text{arc}\cos\left(\frac{15mg}{kl}\right)$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla kątów φ_1, φ_2, φ_3, φ_4:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \cos\varphi\left(-15mgl + kl^2\cos\varphi\right) + \sin\varphi\left(-kl^2\sin\varphi\right) =$$

$$= -15mgl\cos\varphi + kl^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = -15mgl + kl^2$$

W położeniu $\varphi_1 = 0$ wartość drugiej pochodnej nie jest określona jednoznacznie i można rozpatrzeć dwie sytuacje:

- $-15mgl + kl^2 > 0$ stabilne położenie równowagi,
- $-15mgl + kl^2 < 0$ niestabilne położenie równowagi,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\pi} = 15mgl + kl^2 > 0$$

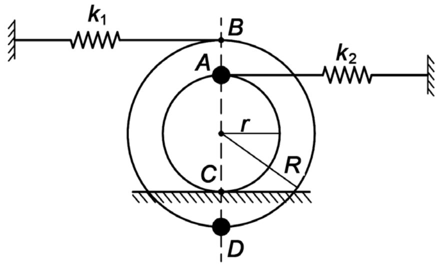
W położeniu $\varphi_2 = \pi$ mamy równowagę stałą, czyli położenie pręta jest stabilnym położeniem równowagi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_3=\text{arc}\cos\left(\frac{15mg}{kl}\right)} = -15mgl\frac{15mg}{kl} + kl^2\left(\left(\frac{15mg}{kl}\right)^2 - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= -\frac{225m^2g^2}{k} + \frac{225m^2g^2}{k} - kl^2\sin^2\varphi = -kl^2\sin^2\varphi < 0$$

Zadanie 5.4.

Znaleźć zależność, jaka powinna zachodzić między współczynnikami sztywności k_1 i k_2, aby położenie równowagi, było stabilnym położeniem równowagi dla jednorodnego współśrodkowego walca o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R, masie $6m$, na którym umieszczono w punkcie A masę o wartości $2m$, a w punkcie D masę m o wartości, jak na rys. 5.5. Sprężyny są nieodkształcone w przypadku, gdy walec znajduje się w położeniu, w którym średnica AC jest prostopadła do podłoża.



Rys. 5.5. Mechanizm do zadania 5.4

Rozwiązanie:

Układ ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie C oraz linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt C. Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości obu mas (energia potencjalna walca jest stała, więc możemy ją pominąć) oraz energii potencjalnej sprężystości:

$$U = 2mg2r\cos\varphi - mg\left(R-r\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}k_1\left(\left(R+r\right)\sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(2r\sin\varphi\right)^2 =$$

$$= \left(5mgr - mgR\right)\cos\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1\left(R+r\right)^2 + 2k_2r^2\right)\left(\sin\varphi\right)^2$$

Zakładamy małe drgania, zatem stosujemy przybliżenie:

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U = \left(5mgr - mgR\right)\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) + \left(\frac{1}{2}k_1\left(R+r\right)^2 + 2k_2r^2\right)\varphi^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -\left(5mgr - mgR\right)\varphi + \left(k_1\left(R+r\right)^2 + 4k_2r^2\right)\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, więc:

$$-\left(5mgr - mgR\right)\varphi + \left(k_1\left(R+r\right)^2 + 4k_2 r^2\right)\varphi = 0$$

zatem:

$$\varphi = 0$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\left(5mgr - mgR\right) + \left(k_1\left(R+r\right)^2 + 4k_2 r^2\right)$$

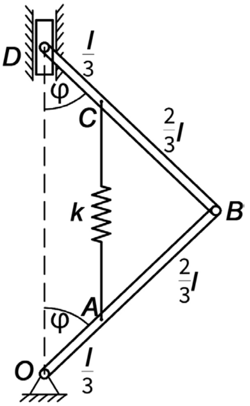
aby położenie $\varphi = 0$ było stabilnym położeniem równowagi, musi zachodzić warunek $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} > 0$, zatem:

$$-\left(5mgr - mgR\right) + \left(k_1\left(R+r\right)^2 + 4k_2 r^2\right) > 0$$

$$k_1\left(R+r\right)^2 + 4k_2 r^2 > 5mgr - mgR$$

Zadanie 5.5.

Dwie jednorodne belki o masach m i długościach l, połączone są przegubowo w punkcie B. Koniec jednej belki zamocowany jest na podporze stałej przegubowej, a koniec drugiej belki połączono z suwakiem jak pokazuje rys. 5.6. W punktach A i C zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności $k = \frac{9mg}{4l}$. W położeniu $\varphi = 0$ sprężyna jest nieodkształcona. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.



Rys. 5.6. Mechanizm do zadnia 5.5

Rozwiązanie:
Układ ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie O oraz linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O. Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości obu belek oraz energii potencjalnej sprężystości:

$$U = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + mg\frac{3l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(\frac{4l}{3} - \frac{4l}{3}\cos\varphi\right)^2 =$$

$$= 2mgl\cos\varphi + \frac{8}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -2mgl\sin\varphi + \frac{16}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, zatem:

$$-\sin\varphi\left(2mgl - \frac{16}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\right) = 0$$

$$-\sin\varphi\left(2mgl - \frac{16}{9}kl^2 + \frac{16}{9}kl^2\cos\varphi\right) = 0$$

Zatem:

$$\sin\varphi = 0 \qquad \text{lub} \qquad 2mgl - \frac{16}{9}kl^2 + \frac{16}{9}kl^2\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{-2mg + \frac{16}{9}kl}{\frac{16}{9}kl}$$

Pierwsze równanie sin φ = 0 dla $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ma jedno rozwiązanie:

$$\varphi_1 = 0$$

W drugim równaniu, podstawiając za $k = \frac{9mg}{4l}$, otrzymujemy $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, cosinus dla $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, zatem:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla kątów φ_1, φ_2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \cos\varphi\left(-2mgl + \frac{16}{9}kl^2 - \frac{16}{9}kl^2\cos\varphi\right) + \sin\varphi\left(\frac{16}{9}kl^2\sin\varphi\right) =$$

$$= \left(-2mgl + \frac{16}{9}kl^2\right)\cos\varphi - \frac{16}{9}kl^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= \left(-2mgl + \frac{16}{9}kl^2\right)\cos\varphi - \frac{16}{9}kl^2\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = -2mgl < 0$$

W położeniu $\varphi_1 = 0$ wartość drugiej pochodnej przyjmuje wartość ujemną, zatem mamy niestabilne położenie równowagi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{\pi}{3}} = -mgl + \frac{8}{9}kl^2 + \frac{8}{9}kl^2 = -mgl + \frac{16}{9}kl^2 = -mgl + \frac{8}{9}\cdot\frac{9mg}{4l}l^2 = mgl > 0$$

W położeniu $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ mamy równowagę stałą, czyli położenie pręta jest stabilnym położeniem równowagi.

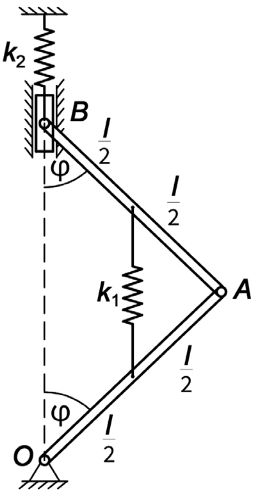
Zadanie 5.6.

Dwie jednorodne belki o masach m i długościach l połączone są przegubowo w punkcie A. Koniec jednej belki zamocowany jest na podporze stałej przegubowej, a koniec drugiej belki połączono z suwakiem o masie $2m$, jak na rys. 5.7. Do suwaka zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności $k_2 = \frac{2mg}{l}$, środki prętów połączone są drugą sprężyną o współczynniku sztywności $k_1 = \frac{mg}{l}$. W położeniu $\varphi = 0$ sprężyny są nieodkształcone. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.

Rozwiązanie:

Układ ma jeden stopień swobody, zatem przyjmiemy jedną współrzędną uogólnioną φ.

Przyjmijmy początek układu współrzędnych w punkcie O oraz linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O. Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości obu belek i suwaka oraz energii potencjalnej sprężystości:



Rys. 5.7. Mechanizm do zadnia 5.6

$$U = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + mg\frac{3l}{2}\cos\varphi + 2mg\,2l\cos\varphi + \frac{1}{2}k_2\left(2l\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k_1\left(l - l\cos\varphi\right)^2$$

$$U = 6mgl\cos\varphi + 2k_2l^2\left(\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k_1l^2\left(1-\cos\varphi\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodną energii potencjalnej po zmiennej uogólnionej:

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -6mgl\sin\varphi - 4k_2l^2\cos\varphi\sin\varphi + 4k_1l^2\left(1-\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$, zatem:

$$\sin\varphi\left(-6mgl - 4k_2l^2\cos\varphi + 4k_1l^2\left(1-\cos\varphi\right)\right) = 0$$

$$\sin\varphi\left(-6mgl + 4k_1l^2 - \left(4k_1l^2 + 4k_2l^2\right)\cos\varphi\right) = 0$$

Zatem:

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{lub} \quad -6mgl + 4k_1l^2 - \left(4k_1l^2 + 4k_2l^2\right)\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{-6mg + 4k_1l^2}{4k_1l^2 + 4k_2l^2}$$

Pierwsze równanie sin φ = 0 dla $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ma jedno rozwiązanie:

$$\varphi_1 = 0$$

W drugim równaniu, podstawiając za $k_1 = \frac{mg}{l}$ i za $k_2 = \frac{2mg}{l}$, otrzymujemy cos φ $= \frac{1}{2}$ dla $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a więc:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla kątów φ_1, φ_2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \cos\varphi\left(-6mgl + 4k_1 l^2 - \left(4k_1 l^2 + 4k_2 l^2\right)\cos\varphi\right) + \sin\varphi\left(\left(4k_1 l^2 + 4k_2 l^2\right)\sin\varphi\right) =$$

$$= \left(-6mgl + 4k_1 l^2\right)\cos\varphi - 4l^2\left(k_1 + k_2\right)\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= \left(-6mgl + 4k_1 l^2\right)\cos\varphi - 4l^2\left(k_1 + k_2\right)\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = -6mgl + 4k_1 l^2 - \left(4k_1 l^2 + 4k_2 l^2\right) = -6mgl - 4\frac{2mg}{l} l^2 = -14mgl < 0$$

W położeniu $\varphi_1 = 0$ wartość drugiej pochodnej przyjmuje wartość ujemną, zatem mamy niestabilne położenie równowagi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{\pi}{3}} = -3mgl + 2k_1 l^2 - \left(4k_1 l^2 + 4k_2 l^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = -3mgl + \left(2 - 2\sqrt{3}\right)k_1 l^2 - 2k_2 l^2\sqrt{3} =$$

$$= -3mgl + \left(2 - 2\sqrt{3}\right)mgl - 4\sqrt{3}mgl = -mgl - 6\sqrt{3}mgl < 0$$

Dla kąta $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ położenie pręta jest niestabilnym położeniem równowagi.

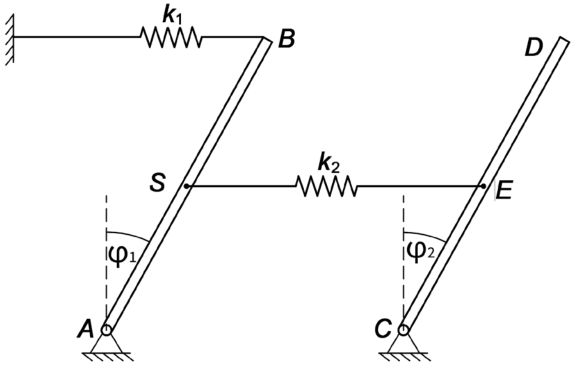
Zadanie 5.7.

Dwa jednorodne pręty o długościach $2l$ i masach m są zamocowane przegubowo, jak pokazano na rys. 5.8. Koniec pierwszego pręta przymocowano do sprężyny o współczynniku sztywności k_1. Środki tych prętów połączono drugą sprężyną o współczynniku sztywności k_2. W położeniu pionowym sprężyny są nienaprężone. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statycznym położeniem równowagi.

Rozwiązanie:

Układ ma dwa stopnie swobody, zatem przyjmiemy dwie współrzędne uogólnione φ_1 oraz φ_2.

Energia potencjalna układu prętów, jeśli przyjmiemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt A, jest sumą energii potencjalnej ciężkości i sprężystości, zatem jest równa:



Rys. 5.8. Mechanizm do zadania 5.7

$$U = mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(l\sin\varphi_2 - l\sin\varphi_1\right)^2$$

Jeżeli położenie ma być statycznym położeniem równowagi, to kąty φ_1 i φ_2 muszą być małe, zatem stosujemy przybliżenie:

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$

$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U = mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2\right) + mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) + \frac{1}{2}k_1\left(2l\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(l\varphi_2 - l\varphi_1\right)^2$$

$$U = 2mgl + \left(2k_1l^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_1^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi_2^2 + \frac{1}{2}k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodne energii potencjalnej po zmiennych uogólnionych φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 2\left(2k_1l^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_1 - k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -mgl\varphi_2 + k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0$ i $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0$, zatem:

$$\begin{cases} 2\left(2k_1l^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_1 - k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \\ -mgl\varphi_2 + k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \end{cases}$$

Otrzymany układ jest układem liniowym jednorodnym, zatem jego rozwiązaniem jest:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Obliczając pochodne rzędu drugiego, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = 4k_1 l^2 - mgl + k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = -mgl + k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \varphi_1} = -k_2 l^2$$

Wiemy, że drugie pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}$ i $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}$ muszą być większe od zera, więc:

$$4k_1 l^2 - mgl + k_2 l^2 > 0 \qquad -mgl + k_2 l^2 > 0$$

$$4k_1 + k_2 > \frac{mg}{l} \qquad k_2 > \frac{mg}{l}$$

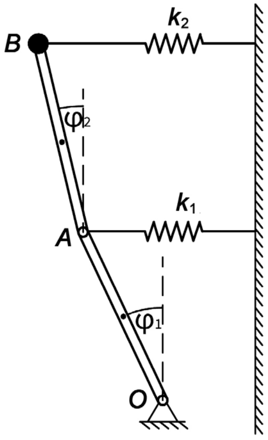
Dodatkowo spełniony musi być warunek:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(4k_1 l^2 - mgl + k_2 l^2\right)\left(-mgl + k_2 l^2\right) - \left(-k_2 l^2\right)^2 > 0$$

Jeżeli będą spełnione te wszystkie warunki, położenie pionowe prętów będzie statycznym położeniem równowagi.

Zadanie 5.8.
Dwa jednorodne pręty o długościach $2l$ i masach m połączono przegubowo, a na końcu pręta AB, jak pokazano na rys. 5.9, umieszczono masę $2m$. Koniec pierwszego pręta przymocowano do sprężyny o współczynniku sztywności k_1. Koniec drugiego pręta przymocowano do sprężyny o współczynniku sztywności k_2. W położeniu pionowym sprężyny są nienaprężone. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statecznym położeniem równowagi.



Rys. 5.9. Mechanizm do zadnia 5.8

Rozwiązanie:
Układ ma dwa stopnie swobody, zatem przyjmiemy dwie współrzędne uogólnione φ_1 oraz φ_2.

Energia potencjalna układu, jeśli przyjmiemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O, jest sumą energii potencjalnej ciężkości i sprężystości, zatem jest równa:

$$U = mgl\cos\varphi_1 + \left(2mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2\right) + \left(4mgl\cos\varphi_1 + 4mgl\cos\varphi_2\right)$$
$$+\frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(2l\sin\varphi_1 + 2l\sin\varphi_2\right)^2$$

Po uproszczeniu mamy:

$$U = 7mgl\cos\varphi_1 + 5mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(2l\sin\varphi_1 + 2l\sin\varphi_2\right)^2$$

Jeżeli położenie ma być statycznym położeniem równowagi, to kąty φ_1 i φ_2 muszą być małe, zatem stosujemy przybliżenie:

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$
$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U = 7mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2\right) + 5mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) + \frac{1}{2}k_1\left(2l\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(2l\varphi_1 + 2l\varphi_2\right)^2$$

$$U = 12mgl + \left(2k_1l^2 - \frac{7}{2}mgl\right)\varphi_1^2 - \frac{5}{2}mgl\varphi_2^2 + 2k_2l^2\left(\varphi_2 + \varphi_1\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodne energii potencjalnej po zmiennych uogólnionych φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 2\left(2k_1 l^2 - \frac{7}{2}mgl\right)\varphi_1 + 4k_2 l^2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -5mgl\varphi_2 + 4k_2 l^2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0$ i $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0$, zatem:

$$\begin{cases} 2\left(2k_1 l^2 - \frac{7}{2}mgl\right)\varphi_1 + 4k_2 l^2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = 0 \\ -5mgl\varphi_2 + 4k_2 l^2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = 0 \end{cases}$$

Otrzymany układ jest układem liniowym jednorodnym, więc jego rozwiązaniem jest:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Obliczając pochodne rzędu drugiego, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = 4k_1 l^2 - 7mgl + 4k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = -5mgl + 4k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \varphi_1} = 4k_2 l^2$$

Wiemy, że drugie pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}$ i $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}$ muszą być większe od zera, więc:

$$4k_1 l^2 - 7mgl + 4k_2 l^2 > 0 \qquad -5mgl + 4k_2 l^2 > 0$$

$$k_1 + k_2 > \frac{7mg}{4l} \qquad k_2 > \frac{5mg}{4l}$$

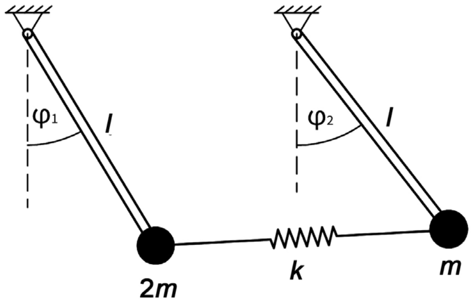
Dodatkowo musi być spełniony warunek:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(4k_1l^2-7mgl+4k_2l^2\right)\left(-5mgl+4k_2l^2\right)-\left(4k_2l^2\right)^2>0$$

Jeżeli będą spełnione te wszystkie warunki, położenie pionowe prętów będzie statycznym położeniem równowagi.

Zadanie 5.9.
Dwa jednorodne pręty o długościach *l* i masach *m* zamocowane są na podporach stałych przegubowych, jak na rys. 5.10. Do końca pierwszego pręta przymocowano masę o wartości 2*m*, a do drugiego masę o wartości *m*. Obie masy połączono sprężyną o współczynniku sztywności *k*. W położeniu pionowym prętów, sprężyna jest nienaprężona. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statycznym położeniem równowagi.



Rys. 5.10. Mechanizm do zadnia 5.9

Rozwiązanie:
Układ ma dwa stopnie swobody, zatem przyjmiemy dwie współrzędne uogólnione φ_1 oraz φ_2.

Energia potencjalna układu prętów, jeśli przyjmiemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt zamocowania tych prętów, jest sumą energii potencjalnej ciężkości i sprężystości. Zatem jest równa:

$$U=-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi_1-2mgl\cos\varphi_1-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi_2-mgl\cos\varphi_2+\frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi_2-l\sin\varphi_1\right)^2$$

$$U=-\frac{5}{2}mgl\cos\varphi_1-\frac{3}{2}mgl\cos\varphi_2+\frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi_2-l\sin\varphi_1\right)^2$$

Jeżeli położenie ma być statycznym położeniem równowagi, to kąty φ_1 i φ_2 muszą być małe, zatem stosujemy przybliżenie:

$$\sin\varphi_1\approx\varphi_1 \qquad \sin\varphi_2\approx\varphi_2$$

$$\cos\varphi_1\approx1-\frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2\approx1-\frac{1}{2}\varphi_2^2$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U=-\frac{5}{2}mgl\left(1-\frac{1}{2}\varphi_1^2\right)-\frac{3}{2}mgl\left(1-\frac{1}{2}\varphi_2^2\right)+\frac{1}{2}kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)^2$$

$$U=-4mgl+\frac{5}{4}mgl\varphi_1^2+\frac{3}{4}mgl\varphi_2^2+\frac{1}{2}kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodne energii potencjalnej po zmiennych uogólnionych φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}=\frac{5}{2}mgl\varphi_1-kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}=\frac{3}{2}mgl\varphi_2+kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \ddot{o}_1}=0$ i $\frac{\partial U}{\partial \ddot{o}_2}=0$, zatem:

$$\begin{cases}\frac{5}{2}mgl\varphi_1-kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=0\\ \frac{3}{2}mgl\varphi_2+kl^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=0\end{cases}$$

Otrzymany układ jest układem liniowym jednorodnym, zatem jego rozwiązaniem jest:

$$\varphi_1=\varphi_2=0$$

Obliczając pochodne rzędu drugiego, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}=\frac{5}{2}mgl+kl^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}=\frac{3}{2}mgl+kl^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1\varphi_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2\varphi_1}=-kl^2$$

Wiemy, że drugie pochodne $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}$ i $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}$ muszą być większe od zera, więc:

$$\frac{5}{2}mgl + kl^2 > 0 \qquad \frac{3}{2}mgl + kl^2 > 0$$

Te warunki są zawsze spełnione.
Dodatkowo spełniony musi być warunek:

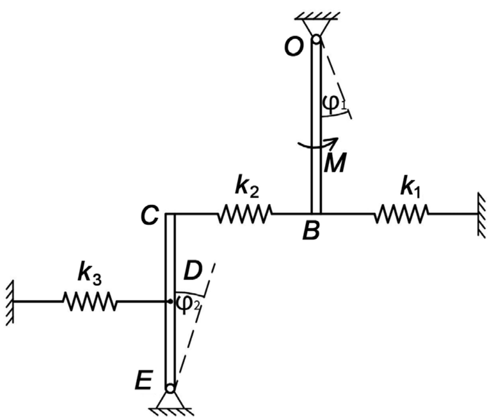
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(\frac{5}{2}mgl + kl^2\right)\left(\frac{3}{2}mgl + kl^2\right) - \left(-kl^2\right)^2 > 0$$

$$\frac{15}{4}m^2 g^2 l^2 + 4mgkl^3 > 0$$

Powyższa nierówność jest również zawsze spełniona, więc położenie pionowe tych prętów będzie statycznym położeniem równowagi.

Zadanie 5.10.
Dwa jednorodne pręty o długościach $2l$ i masach m zajmują położenie pionowe, jak pokazano na rys. 5.11. Końce prętów połączono sprężyną o współczynniku sztywności k_2. Dodatkowo w połowie długości pręta CE zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności odpowiednio k_3 oraz do końca pręta OB również zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności k_1. W położeniu pionowym prętów sprężyny są nieodkształcone. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statycznym położeniem równowagi.



Rys. 5.11. Mechanizm do zadania 5.10

Rozwiązanie:
Układ ma dwa stopnie swobody, zatem przyjmiemy dwie współrzędne uogólnione φ_1 oraz φ_2.

Energia potencjalna układu prętów, jeśli przyjmiemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt E, jest sumą energii potencjalnej ciężkości i sprężystości, zatem jest równa:

$$U = mgl\cos\varphi_2 + mg\left(2l - l\cos\varphi_1\right) + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(2l\sin\varphi_1 - 2l\sin\varphi_2\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k_3\left(l\sin\varphi_2\right)^2$$

Jeżeli położenie ma być statycznym położeniem równowagi, to kąty φ_1 i φ_2 muszą być małe, zatem stosujemy przybliżenie:

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$
$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2$$

Podstawiając do energii potencjalnej, otrzymujemy:

$$U = mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2\right) + mgl\left(2 - \left(1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2\right)\right) + \frac{1}{2}k_1\left(2l\varphi_1\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k_2\left(2l\varphi_1 - 2l\varphi_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(l\varphi_2\right)^2$$

$$U = 2mgl + \left(2k_1l^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_1^2 + \left(\frac{1}{2}k_3l^2 + \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_2^2 + 2k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2$$

Korzystając z zasady Dirichleta, obliczymy pochodne energii potencjalnej po zmiennych uogólnionych φ_1 i φ_2:

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = \left(4k_1l^2 - mgl\right)\varphi_1 - 4k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_2} = \left(k_3l^2 + mgl\right)\varphi_2 + 4k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial\varphi_1} = 0$ i $\frac{\partial U}{\partial\varphi_2} = 0$, zatem:

$$\begin{cases}\left(4k_1l^2 - mgl\right)\varphi_1 - 4k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0\\ \left(k_3l^2 + mgl\right)\varphi_2 + 4k_2l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0\end{cases}$$

Otrzymany układ jest układem liniowym jednorodnym, zatem jego rozwiązaniem jest:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Obliczając pochodne rzędu drugiego, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = 4k_1 l^2 - mgl + 4k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = k_3 l^2 + mgl + 4k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \varphi_1} = -4k_2 l^2$$

Wiemy, że drugie pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}$ i $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2}$ muszą być większe od zera, więc:

$$4k_1 l^2 - mgl + 4k_2 l^2 > 0 \qquad k_3 l^2 + mgl + 4k_2 l^2 > 0$$

$$k_1 + k_2 > \frac{mg}{4l} \qquad k_3 + 4k_2 > -\frac{mg}{l}$$

Dodatkowo spełniony musi być warunek:

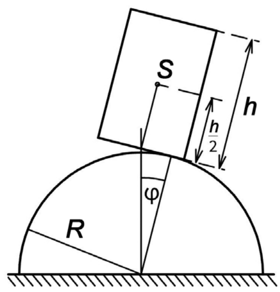
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(4k_1 l^2 - mgl + 4k_2 l^2\right)\left(k_3 l^2 + mgl + 4k_2 l^2\right) - \left(-4k_2 l^2\right)^2 > 0$$

Jeżeli będą spełnione te wszystkie warunki, położenie pionowe prętów będzie statycznym położeniem równowagi.

5.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

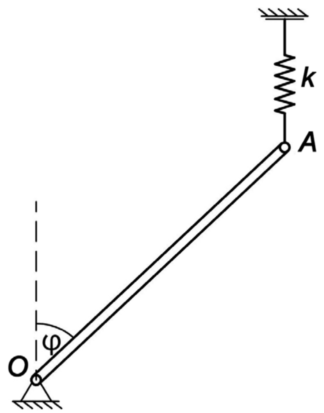
Zadanie 5.11.
Na półkuli o promieniu R ustawiono jednorodny walec o masie m i wysokości h, jak na rys. 5.12. Znaleźć zależność między promieniem półkuli a wysokością walca, tak aby walec pozostawał w położeniu równowagi trwałej.



Rys. 5.12. Mechanizm do zadnia 5.11

Zadanie 5.12.

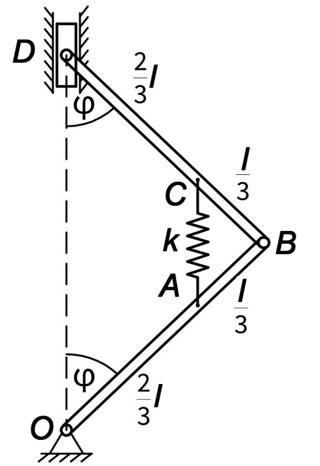
Jednorodna belka o masie m i długości $2l$ zamocowana jest w punkcie O na podporze stałej przegubowej, a jej drugi koniec zawieszony jest na sprężynie o współczynniku sztywności $k = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{4l}$, jak na rys. 5.13. Sprężyna zaczepiona jest w ten sposób, że może przesuwać się w poziomie. Dla kąta φ = 0 sprężyna jest nieodkształcona. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.



Rys. 5.13. Mechanizm do zadnia 5.12

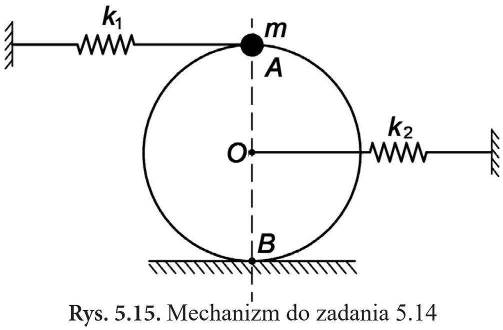
Zadanie 5.13.

Dwie jednorodne belki o masie m i długości l połączone są przegubowo w punkcie B. Koniec jednej belki zamocowany jest na podporze stałej przegubowej, a koniec drugiej połączono z suwakiem, jak na rys. 5.14. W punktach A i C zamocowano sprężynę o współczynniku sztywności $k = \frac{9\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{2l}$. W położeniu φ = 0 sprężyna jest nieodkształcona. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.



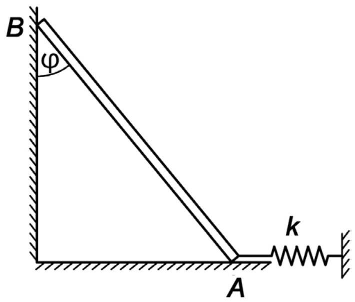
Rys. 5.14. Mechanizm do zadnia 5.13

Zadanie 5.14.
Znaleźć zależność, jaka powinna zachodzić między współczynnikami sztywności k_1 i k_2, aby położenie równowagi było stabilnym położeniem równowagi dla jednorodnego walca o środku O, promieniu r i masie $4m$, na którym umieszczono w punkcie A masę o wartości , jak na rys. 5.15. Sprężyny są nieodkształcone w przypadku, gdy walec znajduje się w takim położeniu, że średnica AB jest prostopadła do podłoża. Założyć małe drgania.



Rys. 5.15. Mechanizm do zadania 5.14

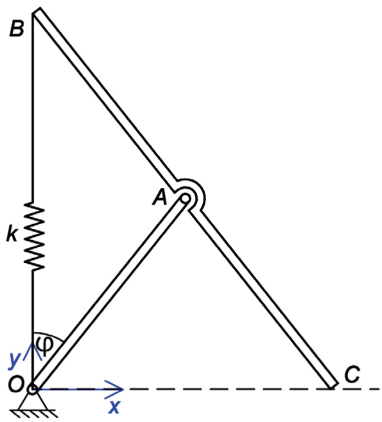
Zadanie 5.15.
Pręt AB o długości $2l$ i masie m jest oparty o gładką powierzchnię, jak pokazano na rys. 5.16. Do końca pręta w punkcie A zamocowano sprężynkę o współczynniku sztywności $k = \frac{mg}{2l}$. Dla $\varphi = 0$ sprężyna jest nieodkształcona. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.



Rys. 5.16. Mechanizm do zadania 5.15

Zadanie 5.16.

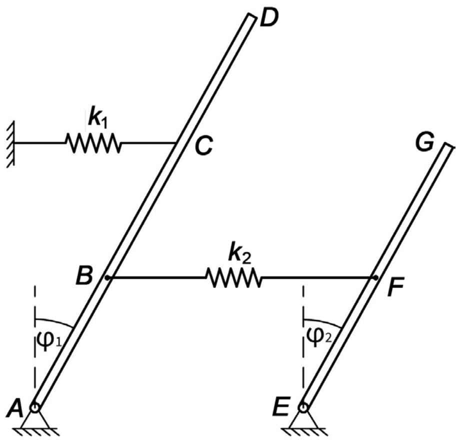
Korba OA o długości l i masie m połączona jest przegubowo ze środkiem pręta o długości $2l$ i masie $2m$, jak na rys. 5.17. Koniec pręta połączony jest z punktem zamocowania korby sprężyną o współczynniku sztywności $k = \dfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)mg}{2l}$. Sprężyna jest nieodkształcona, gdy korba i pręt zajmują położenie pionowe. Wyznaczyć położenia równowagi i określić rodzaj równowagi.



Rys. 5.17. Mechanizm do zadania 5.16

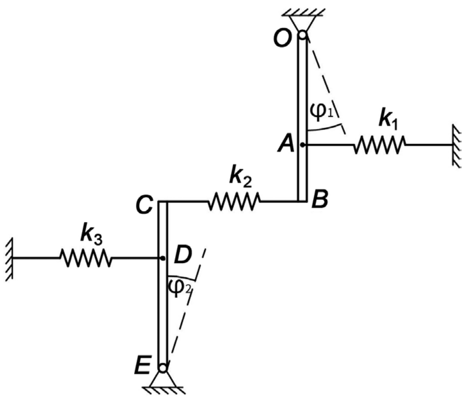
Zadanie 5.17.

Dwa jednorodne pręty AD i EG o długościach odpowiednio $3l$ i $2l$, masach m mogą poruszać się w płaszczyźnie pionowej, jak pokazano na rys. 5.18. Końce prętów połączono sprężyną o współczynniku sztywności k_2. Środek pręta EG połączony jest z jedną trzecią długości pręta AD sprężyną o współczynniku sztywności k_2. Dodatkowo pręt AD w dwóch trzecich długości połączony jest ze sprężyną o współczynniku sztywności k_2. W położeniu pionowym prętów sprężyny są nieodkształcone. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statycznym położeniem równowagi. Założyć małe drgania.



Rys. 5.18. Mechanizm do zadnia 5.17

Zadanie 5.18.
Dwa jednorodne pręty o długościach $3l$ i masach m zajmują położenie pionowe, jak na rys. 5.19. Końce prętów połączono sprężyną o współczynniku sztywności k_2. Dodatkowo w dwóch trzecich długości pręta, licząc od zamocowania, każdy z prętów jest połączony ze sprężyną o współczynniku sztywności odpowiednio k_1 i k_3. W położeniu pionowym prętów sprężyny są nieodkształcone. Określić warunki, aby położenie pionowe tych prętów było statycznym położeniem równowagi. Założyć małe drgania.



Rys. 5.19. Mechanizm do zadnia 5.18

VI. MECHANIKA HAMILTONOWSKA

Na początku XIX wieku pojawiło się trzecie sformułowanie mechaniki, które ostatecznie zostało sformułowane w 1834 roku przez irlandzkiego matematyka Williama Hamiltona i nosi nazwę mechaniki hamiltonowskiej. Mechanika hamiltonowska, podobnie jak mechanika lagranżowska, jest równoważna mechanice newtonowskiej. Podejście hamiltonowskie, w którym główną rolę będzie odgrywała funkcja Hamiltona, potocznie zwana hamiltonianem, jest bardziej elastyczne niż podejście Lagrange'a. Funkcja Hamiltona ma interpretację fizyczną i określa całkowitą energię układu, która jest często wielkością zachowaną. Podejście hamiltonowskie w bardzo prosty sposób pozwala przejść z mechaniki klasycznej do mechaniki kwantowej. W związku z tym bardzo często stosujemy formalizm Hamiltona we współczesnej fizyce, astrofizyce, przy projektowaniu akceleratorów cząstek elementarnych.

6.1. FUNKCJA HAMILTONA

W rozdziale IV rozważaliśmy funkcję Lagrange'a, którą można opisać za pomocą niezależnych współrzędnych uogólnionych q_1, q_2, …, q_s, prędkości uogólnionych $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s$ oraz czasu t. Zatem możemy zapisać, że $L\left(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t\right)$, czyli $L = L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) = T - U$.

Korzystając z definicji pochodnej funkcji złożonej, zróżniczkujmy ją po czasie:

$$\frac{d}{dt} L\left(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{6.1}$$

Korzystając z równania Lagrange'a (4.33), możemy zapisać:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \tag{6.2}$$

Pochodna potencjału kinetycznego po współrzędnej uogólnionej $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ daje nam pochodną pędu uogólnionego, a z kolei pochodna potencjału kinetycznego po prędkości uogólnionej $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ daje **pęd uogólniony (kanoniczny)**. Zatem wzór (6.1) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s}\left(p_i\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{6.3}$$

Jeżeli funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu, wówczas $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, czyli wzór (6.3) przyjmie postać:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s}\left(p_i\dot{q}_i\right)$$

Przenosząc wszystko na lewą stronę, otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(p_i\dot{q}_i\right) - L\right) = 0 \tag{6.4}$$

Wyrażenie pod pochodną we wzorze (6.4) oznaczymy symbolem H i nazwiemy **funkcją Hamiltona** lub **hamiltonianem**, zatem:

$$H = \sum_{i=1}^{s}\left(p_i\dot{q}_i\right) - L \tag{6.5}$$

W podejściu hamiltonowskim współrzędnych definiuje punkt w przestrzeni $2s$ – wymiarowej, którą nazywamy **przestrzenią fazową**. Równania Hamiltona określają w jednoznaczny sposób trajektorię w przestrzeni fazowej, zaczynając w dowolnie wybranym punkcie początkowym.

6.2. KANONICZNE RÓWNANIA HAMILTONA DLA JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH

Rozważmy ruch w jednym wymiarze z siłami zachowawczymi, opisany jedną współrzędną uogólnioną q, Energia kinetyczna zależy zarówno od współrzędnej uogólnionej q, jak i od prędkości uogólnionej $\dot{q}$, natomiast energia potencjalna układu zachowawczego zależy tylko od współrzędnej uogólnionej q. Funkcja Lagrange'a wyraża się wzorem:

$$L = L\left(q,\dot{q}\right) = T\left(q,\dot{q}\right) - U\left(q\right) \tag{6.6}$$

Energia kinetyczna może zależeć od $\dot{q}$ tylko kwadratowo, a zależność od może być opisana dowolną funkcją $A(q)$. Zatem funkcję Lagrange'a możemy zapisać następująco:

$$L = T - U = \frac{1}{2}A\left(q\right)\dot{q}^2 - U\left(q\right) \tag{6.7}$$

Hamiltonian w jednym wymiarze możemy zdefiniować jako:

$$H = p\dot{q} - L \tag{6.8}$$

Pęd uogólniony możemy zapisać jako:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q)\dot{q} \tag{6.9}$$

Ze wzoru (6.9) wyprowadzimy wyrażenie opisujące prędkość uogólnioną:

$$\dot{q} = \frac{p}{A(q)} = \dot{q}(q,p) \tag{6.10}$$

Wstawiając wyrażenie (6.10) do (6.8), dostajemy hamiltonian jako funkcję opisaną dwiema niewiadomymi q i p:

$$H(q,p) = p\dot{q}(q,p) - L(q,\dot{q}(q,p)) \tag{6.11}$$

Obliczając pochodną hamiltonianu (6.11) po q, otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \left[\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right] \tag{6.12}$$

Wiedząc, że $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$, wyrażenie (6.12) możemy zapisać w postaci uproszczonej:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{d}{dt}p = -\dot{p} \tag{6.13}$$

Obliczając pochodną hamiltonianu (6.11) po p, otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left[\dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right] - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} \tag{6.14}$$

Wyprowadziliśmy równania, które nazywać będziemy **kanonicznymi równaniami Hamiltona** dla układów jednowymiarowych:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \tag{6.15}$$

Otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe rzędu pierwszego, natomiast stosując formalizm Lagrange'a otrzymalibyśmy jedno równanie różniczkowe rzędu drugiego.

6.3. KANONICZNE RÓWNANIA HAMILTONA DLA WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH

Rozważmy ruch w s wymiarowej przestrzeni z siłami zachowawczymi, opisany przez współrzędne uogólnione $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, prędkości uogólnione $\dot{\boldsymbol{q}} = (q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s)$ i pędy uogólnione $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$.

Funkcję Lagrange'a możemy zapisać następująco:

$$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = T - U \tag{6.16}$$

Funkcję Hamiltona zapiszemy w postaci:

$$H = \sum_{i=1}^{s} (p_i \dot{q}_i) - L \tag{6.17}$$

Pędy uogólnione będą się wyrażać wzorem:

$$p_i = \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{6.18}$$

Wzór (6.18) możemy potraktować jako układ **równań z** niewiadomymi, zatem prędkości uogólnione możemy zapisać jako funkcje współrzędnych uogólnionych $\boldsymbol{q}$, pędów uogólnionych $\boldsymbol{p}$ i czasu t:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$$

Eliminując prędkości uogólnione, otrzymujemy hamiltonian w postaci:

$$H = H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) - L(q, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), t) \tag{6.19}$$

Obliczając pochodną hamiltonianu (6.19) po $\boldsymbol{q}$, otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \right] \tag{6.20}$$

Wiedząc, że $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, wyrażenie (6.20) możemy zapisać w postaci uproszczonej:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i = -\dot{p}_i \tag{6.21}$$

Obliczając pochodną hamiltonianu (6.19) po $\boldsymbol{p}$, otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \left[\dot{q}_i - \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right] - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i \tag{6.22}$$

Wyprowadziliśmy równania, które nazywać będziemy **kanonicznymi równaniami Hamiltona** dla układów wielowymiarowych.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{6.23}$$

6.4. FUNKCJA HAMILTONA DLA UKŁADÓW SKLERONOMICZNYCH

Rozważmy układ sklerononiczny, czyli układ, **w którym związek między współrzędnymi uogólnionymi i kartezjańskimi jest niezależny od czasu:**

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha\left(q_1, q_2, \ldots, q_s\right) \tag{6.24}$$

Współrzędne określone w ten sposób często nazywamy **współrzędnymi naturalnymi**.

Wyraźmy energię kinetyczną układu za pomocą współrzędnych uogólnionych (6.24):

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha^2 \tag{6.25}$$

Różniczkując współrzędne określone wzorem (6.24) po czasie, otrzymujemy:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{6.26}$$

Podnosząc (6.26) do kwadratu, otrzymujemy:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\alpha^2 = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j \sum_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{6.27}$$

Wstawiając (6.27) do wzoru na energię kinetyczną (6.25), mamy:

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{6.28}$$

Gdzie suma A_{jk} jest równa:

$$A_{jk} = A_{jk}\left(q_1, q_2, \ldots, q_s\right) = \sum_\alpha m_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\alpha}{\partial q_k}$$

Obliczając pęd uogólniony p_i, zróżniczkujemy funkcję Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j A_{ij}\dot{q}_j \tag{6.29}$$

Wstawiając do wyrażenia z hamiltonianu (6.5), otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{s}(p_i\dot{q}_i) = \sum_i \left(\sum_j A_{ij}\dot{q}_j \right)\dot{q}_j = \sum_{i,j} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = 2T \tag{6.30}$$

Zatem hamiltonian przyjmie postać:

$$H = \sum_{i=1}^{s}(p_i\dot{q}_i) - L = 2T - (T-U) = T + U \tag{6.31}$$

Hamiltonian w układach skleronomicznych jest sumą całkowitej energii układu.

6.5. METODYKA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ Z UŻYCIEM KANONICZNYCH RÓWNAŃ HAMILTONA

Formalizm hamiltonowski jest alternatywnym sposobem zapisywania równań ruchu. Stosujemy go do zadań, w których nie występuje tarcie. Rozważając układ o s stopniach swobody, w wyniku otrzymujemy $2s$ równań różniczkowych pierwszego rzędu.

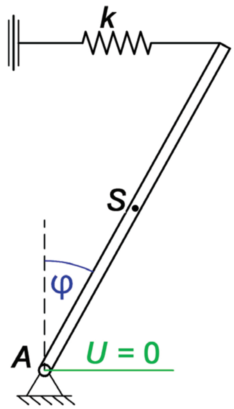
Etapy rozwiązywania zadań metodą kanonicznych równań Hamiltona możemy przedstawić następująco:

- Określ liczbę stopni swobody układu i przyjmij współrzędne uogólnione (będzie ich tyle, ile układ posiada stopni swobody).
- Określ linię zerowej energii i zapisz energię kinetyczną i potencjalną układu.
- Wyznacz funkcję Lagrange'a (potencjał kinetyczny).
- Znajdź pędy uogólnione jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkościach uogólnionych.
- Wyraź prędkości uogólnione za pomocą pędów uogólnionych i współrzędnych uogólnionych.
- Zapisz hamiltonian i wyraź go za pomocą pędów uogólnionych i współrzędnych uogólnionych (bezpiecznie jest korzystać ze wzoru (6.5)).
- Oblicz pochodne funkcji Hamiltona i zapisz kanoniczne równania Hamiltona (6.23).

6.6. ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

W zadaniach w tym rozdziale pomijamy tarcie oraz siłę tarcia zapewniającą toczenie.

Zadanie 6.1.
Pręt AB o masie $2m$ i długości $2l$ przedstawiony na rys. 6.1 połączony jest ze sprężyną o współczynniku sztywności k. Sprężyna jest nieodkształcona w pionowym położeniu pręta i stale zachowuje kierunek poziomy. Znaleźć sformułowanie hamiltonowskie opisujące ruch tego pręta.



Rys. 6.1. Mechanizm do zadania 6.1

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.1 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Pręt wykonuje ruch obrotowy wokół punktu A.

Energia kinetyczna pręta jest równa:

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności pręta wokół punktu A:

$$I_A = \frac{1}{3} 2m(2l)^2 = \frac{8}{3} ml^2$$

Wstawiając wyliczony moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{4}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości pręta AB i energii potencjalnej sprężystości. Przyjmujemy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt A.

$$U = 2mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 - 2mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

Wyznaczamy pęd uogólniony jako pochodną funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$:

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}$$

Z powyższej zależności wyznaczymy prędkość uogólnioną jako funkcję pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{3p}{8ml^2}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona i wyliczoną prędkość ö wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od $\ddot{\varphi}$ i od pędu:

$$H = \dot{\varphi}p - L$$

$$H = \dot{\varphi}p - \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 2mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

$$H = \frac{3p^2}{8ml^2} - \frac{4}{3}ml^2\left(\frac{3p}{8ml^2}\right)^2 + 2mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

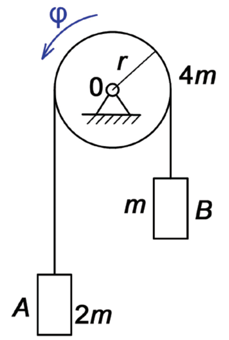
$$H = \frac{3p^2}{16ml^2} + 2mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{3p}{8ml^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial\varphi} = 2mgl\sin\varphi - 2kl\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.2.

Na rys. 6.2 przedstawiono maszynę Atwooda składającą się z beztarciowego bloku o masie $4m$ i promieniu r, przez który przerzucono nieważką nić i zawieszono dwa ciała: A o masie $2m$ i B o masie m. Znaleźć sformułowanie hamiltonowskie opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.2. Mechanizm do zadania 6.2

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.2 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Blok o środku O wykonuje ruch obrotowy, a masy A i B poruszają się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej walca i energii kinetycznej mas A i B. Oznaczmy blok o środku O jako (1), masę A jako (2) i masę B jako (3), zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2mv_A^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} mv_B^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności walca wokół punktu O:

$$I_O = \frac{1}{2} 4mr^2 = 2mr^2$$

Prędkość masy A będzie taka sama jak prędkość masy B, co możemy łatwo zauważyć, przyjmując w punkcie O chwilowy środek obrotu:

$$v_A = v_B = r\dot{\varphi}$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + mv_A^2 + \frac{1}{2} mv_B^2$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2mr^2\dot{\varphi}^2+mr^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$T=\frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości mas A i B.

$$U=2mgr\varphi-mgr\varphi$$

$$U=mgr\varphi$$

W tym przypadku związek między współrzędnymi uogólnionymi a współrzędnymi kartezjańskimi jest niezależny od czasu. Możemy zatem od razu zapisać funkcję Hamiltona jako całkowitą energię układu:

$$H=T+U$$

$$H=\frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}^2+mgr\varphi$$

Wyznaczamy pęd uogólniony jako pochodną energii kinetycznej, która w tym przypadku jest równa funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$:

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=5mr^2\dot{\varphi}$$

Z powyższej zależności wyznaczymy prędkość uogólnioną jako funkcję pędu:

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{5mr^2}$$

Wyliczoną prędkość $\dot{\varphi}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od i od pędu:

$$H=\frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}^2+mgr\varphi$$

$$H=\frac{5}{2}mr^2\left(\frac{p}{5mr^2}\right)^2+mgr\varphi$$

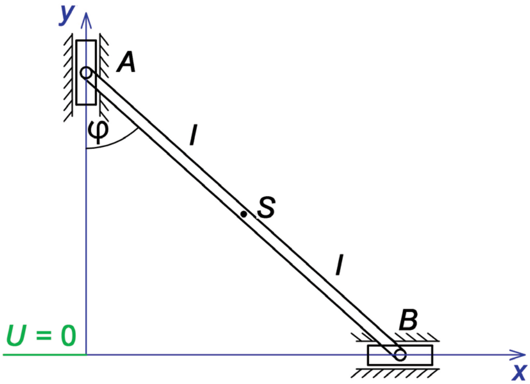
$$H=\frac{p^2}{10mr^2}+mgr\varphi$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{5mr^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgr \end{cases}$$

Jeżeli nie mamy pewności, że nasz układ jest skleronomiczny, należy skorzystać ze wzoru na funkcję Hamiltona w postaci $H = \dot{\varphi}p - L$.

Zadanie 6.3.
W mechanizmie przedstawionym na rys. 6.3 dwa wodziki o masie $2m$ są połączone prętem AB o długości $2l$ i masie m. Znaleźć sformułowanie hamiltonowskie opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.3. Mechanizm do zadania 6.3

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.3 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Pręt AB wykonuje ruch płaski, natomiast wodziki A i B poruszają się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta AB i energii kinetycznej wodzika A i B. Oznaczmy pręt AB jako (1), wodzik A jako (2) i wodzik B jako (3), zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2m v_A^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot 2m v_B^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności pręta AB wokół punktu S:

$$I_S = \frac{1}{12} m(2l)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Współrzędne punktu S są równe:

$$x_S = l\sin\varphi \qquad y_S = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_S = l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu S jest równa:

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2$$

$$v_S^2 = \left(l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_S^2 = l^2\dot{\varphi}^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = 0 \qquad y_A = 2l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_A = 0 \qquad \dot{y}_A = -2l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \left(-2l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_A^2 = 4l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

Współrzędne punktu B są równe:

$$x_B = 2l\sin\varphi \qquad y_B = 0$$
$$\dot{x}_B = 2l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = 0$$

Prędkość punktu B jest równa:

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2$$

$$v_B^2 = \left(2l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_B^2 = 4l^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + m v_A^2 + m v_B^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m 4 l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 + m 4 l^2 \cos^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 4 m l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{14}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż osi. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości pręta AB i wodzika A:

$$U = mgl \cos \varphi + 2mg2l \cos \varphi$$

$$U = 5mgl \cos \varphi$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{14}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 - 5mgl \cos \varphi$$

Wyznaczamy pęd uogólniony jako pochodną funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{28}{3} m l^2 \dot{\varphi}$$

Z powyższej zależności wyznaczymy prędkość uogólnioną jako funkcję pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{3p}{28 m l^2}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona i wyliczoną prędkość $\dot{\varphi}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od φ i od pędu:

$$H = \dot{\varphi} p - L$$

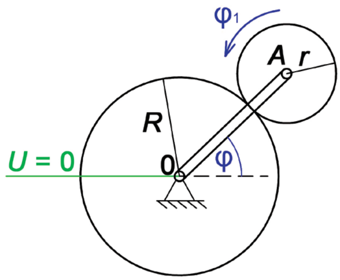
$$H = \dot{\varphi} p - \frac{14}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 5mgl \cos \varphi = \frac{3p^2}{28 m l^2} - \frac{14}{3} m l^2 \left(\frac{3p}{28 m l^2} \right)^2 + 5mgl \cos \varphi$$

$$H = \frac{3p^2}{56ml^2} + 5mgl\cos\varphi$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{3p}{28ml^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 5mgl\sin\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.4.
W mechanizmie przedstawionym na rys. 6.4 koło zębate o masie $2m$ jest uruchamiane korbą o masie m i długości $R + r$, gdzie $R = 2r$. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.4. Mechanizm do zadania 6.4

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.4 ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ. Korzystając z chwilowych środków obrotu, które znajdują się w punkcie O oraz na styku tych dwóch kół zapiszemy $\dot{\varphi}_1$ w zależności od prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$.

$$v_A = (r + R)\dot{\varphi} \qquad v_A = r\dot{\varphi}_1$$

$$(r + 2r)\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\varphi}_1 = 3\dot{\varphi}$$

Pręt OA wykonuje ruch obrotowy, koło o środku O jest nieruchome, natomiast koło zębate o środku A porusza się ruchem płaskim.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta OA i energii kinetycznej koła zębatego o środku A. Oznaczmy pręt OA jako (1), koło zębate jako (2), zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} 2 m v_A^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności pręta OA wokół punktu O i koła zębatego względem środka A:

$$I_O = \frac{1}{3} m \left(R + r\right)^2 = 3mr^2$$

$$I_O = \frac{1}{2} 2mr^2 = mr^2$$

Współrzędne punktu A są równe:

$$x_A = 3r \sin\varphi \qquad y_A = 3r\cos\varphi$$
$$\dot{x}_A = 3r\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_A = -3r\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$$

$$v_A^2 = \left(3r\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-3r\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_A^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_{\smile}\, \dot{\varphi}^{\ddot{u}} + \frac{1}{2} I \;\; \dot{\varphi}_1 + mv$$

$$T = \frac{1}{2} 3mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mr^2 9\dot{\varphi}^2 + m9r^2\dot{\varphi}^2$$

$$T = 15mr^2\dot{\varphi}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt O. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości pręta AB i koła zębatego o środku A.

$$U = mg\frac{3}{2} r\cos\varphi + 2mg3r\cos\varphi$$

$$U = \frac{15}{2} mgr \cos\varphi$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = 15mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{15}{2} mgr \cos\varphi$$

Wyznaczamy pęd uogólniony jako pochodną funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 30mr^2\dot{\varphi}$$

Z powyższej zależności wyznaczymy prędkość uogólnioną jako funkcję pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{30mr^2}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona i wyliczoną prędkość $\dot{\varphi}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od φ i od pędu:

$$H = \dot{\varphi}p - L$$

$$H = \dot{\varphi}p - 15mr^2\dot{\varphi}^2 + 7{,}5mgr\cos\varphi = \frac{p^2}{30mr^2} - 15mr^2\left(\frac{p}{30mr^2}\right)^2 + 7{,}5mgr\cos\varphi$$

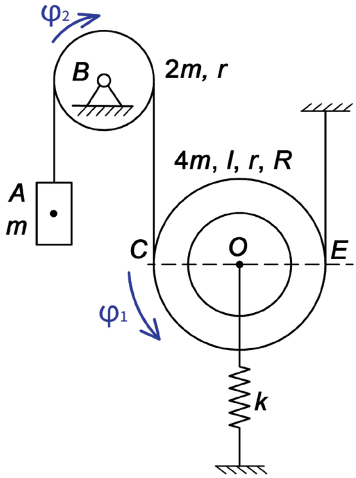
$$H = \frac{p^2}{60mr^2} + \frac{15}{2} mgr \cos\varphi$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{30mr^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 7{,}5mgr\sin\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.5.

Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch mechanizmu przedstawionego na rys. 6.5. Zakładamy, że linki są nieważkie i nierozciągliwe. Przyjąć dane: m, I, r, $R = 2r$, k.



Rys. 6.5. Mechanizm do zadania 6.5

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w punkcie E znajduje się chwilowy środek obrotu. Porównując przemieszczenia wzdłuż linki łączącej oba krążki, otrzymujemy:

$$r\varphi_2 = 4r\varphi_1$$

$$\varphi_2 = 4\varphi_1$$

Mechanizm ma jeden stopień swobody, przyjmijmy zatem jedną współrzędną uogólnioną φ_1. Krążek o środku O wykonuje ruch płaski, krążek o środku B wykonuje ruch obrotowy, a masa A porusza się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej krążków o środku B i O oraz energii kinetycznej masy A. Oznaczmy krążek o środku O jako (1), krążek o środku B jako (2) i masę A jako (3), stąd:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} 4mv_0^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}_1^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} mv_A^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności krążka o środku B, ponieważ dla krążka o środku O jest dany i wynosi I:

$$I_B = \frac{1}{2} 2mr^2 = mr^2$$

Prędkości punktów A i O wyznaczymy, korzystając z chwilowych środków obrotu, które jak wcześniej wspomniano znajdują się w punktach B i E.

$$v_A = r\dot{\varphi}_2 = 4r\dot{\varphi}_1$$

$$v_O = 2r\dot{\varphi}_1$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}_1^2 + 2mv_0^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} mv_A^2$$

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}_1^2 + 8mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}_1^2 + 8mr^2\dot{\varphi}_1^2$$

$$T = \left(\frac{1}{2} I + \frac{33}{2} mr^2 \right) \dot{\varphi}_1^2$$

Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości krążka o środku O i masy A oraz energii potencjalnej sprężystości.

Energia potencjalna jest równa:

$$U = -4mgr\varphi_1 + 8mgr\varphi_1 + \frac{1}{2} k \left(2r\varphi_1 \right)^2$$

$$U = 4mgr\varphi_1 + \frac{1}{2} k \left(2r\varphi_1 \right)^2$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \left(\frac{1}{2} I + \frac{33}{2} mr^2 \right) \dot{\varphi}_1^2 - 4mgr\varphi_1 - \frac{1}{2} k \left(2r\varphi_1 \right)^2$$

Wyznaczamy pęd uogólniony jako pochodną funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}_1$:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(I + 33mr^2 \right) \dot{\varphi}_1$$

Z powyższej zależności wyznaczymy prędkość uogólnioną jako funkcję pędu:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{p}{I + 33mr^2}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona i wyliczoną prędkość wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od φ_1 i od pędu:

$$H = \dot{\varphi}_1 p - L$$

$$H = \dot{\varphi}_1 p - \left(\frac{1}{2}I + \frac{33}{2}mr^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + 4mgr\varphi_1 + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2$$

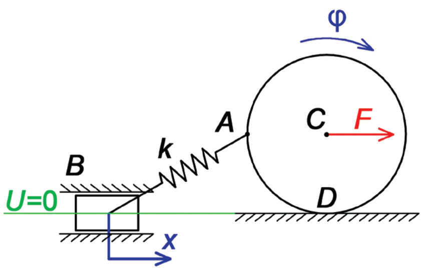
$$H = \frac{p^2}{I + 33mr^2} - \left(\frac{I + 33mr^2}{2}\right)\left(\frac{p}{I + 33mr^2}\right)^2 + 4mgr\varphi_1 + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2$$

$$H = \frac{p^2}{2\left(I + 33mr^2\right)} + 4mgr\varphi_1 + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{I + 33mr^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_1} = 4mgr + 4kr^2\varphi_1 \end{cases}$$

Zadanie 6.6.
Do walca o masie $2m$ i promieniu toczącego się po płaszczyźnie pod wpływem przyłożonej siły zachowawczej F, której odpowiada energia potencjalna $U(\varphi)$, przymocowany jest za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k suwak o masie m. W chwili początkowej sprężyna jest nieodkształcona i tworzy z podłożem kąt 45°. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch takiego mechanizmu, który został przedstawiony na rys. 6.6.



Rys. 6.6. Mechanizm do zadania 6.6

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.6 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione φ i x.

Walec porusza się ruchem płaskim, a suwak wykonuje ruch postępowy.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej walca i energii kinetycznej suwaka B. Oznaczmy walec jako (1), suwak jako (2), zatem:

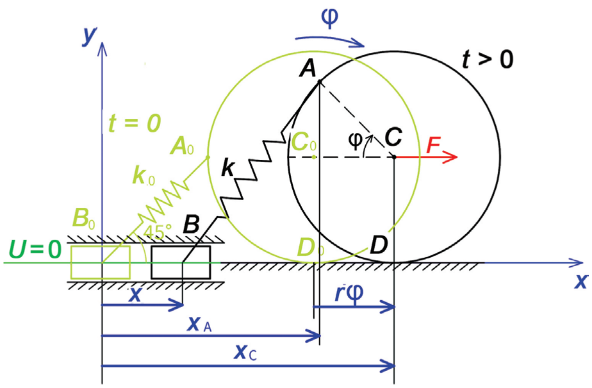
$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} 2 m v_C^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności walca względem środka C:

$$I_C = \frac{1}{2} 2 m r^2 = m r^2$$



Rys. 6.6a

Współrzędne poszczególnych punktów zapiszemy następująco i obliczymy prędkości tych punktów.

Dla punktu B:

$$x_B = x$$

$$v_B = \dot{x}$$

Dla punktu C:

$$x_C = x_{C_0} + r\varphi = 2r + r\varphi$$

$$v_C = r\dot{\varphi}$$

Dla punktu A:

$$x_A = x_C - r\cos\varphi = 2r + r\varphi - r\cos\varphi$$

$$y_A = r + r\sin\varphi$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + m v_C^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Długość sprężyny w dowolnej chwili $t > 0$ jest równa:

$$l = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(2r + r\varphi - r\cos\varphi - x\right)^2 + \left(r + r\sin\varphi - 0\right)^2}$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż płaszczyzny. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości walca, energii potencjalnej sprężystości i energii potencjalnej od siły zachowawczej $U(\varphi)$.

$$U = 2mgr + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\left(x_A - x\right)^2 + y_A^2} - r\sqrt{2} \right)^2 + U\left(\varphi\right)$$

$$U = 2mgr + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\left(2r + r\varphi - r\cos\varphi - x\right)^2 + \left(r + r\sin\varphi\right)^2} - r\sqrt{2} \right)^2 + U\left(\varphi\right)$$

Niech $f\left(x,\varphi\right) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\left(2r + r\varphi - r\cos\varphi - x\right)^2 + \left(r + r\sin\varphi\right)^2} - r\sqrt{2} \right)^2$, więc:

$$U = 2mgr + f\left(x,\varphi\right) + U\left(\varphi\right)$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2mgr - f\left(x,\varphi\right) - U\left(\varphi\right)$$

Wyznaczamy pędy uogólnione sprzężone odpowiednio ze współrzędną φ i x jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 3mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

Z powyższych zależności wyznaczymy prędkości uogólnione $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ w funkcji pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{3mr^2}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona, a wyliczone prędkości $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od współrzędnych uogólnionych i od pędów:

$$H = \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{x}p_x - L$$

$$H = \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{x}p_x - \frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2mgr + f\left(x,\varphi\right) + U\left(\varphi\right)$$

$$H = \frac{p_\varphi^2}{3mr^2} + \frac{p_x^2}{m} - \frac{3}{2}mr^2\frac{p_\varphi^2}{\left(3mr^2\right)^2} - \frac{m}{2}\frac{p_x^2}{m^2} + 2mgr + f\left(x,\varphi\right) + U\left(\varphi\right)$$

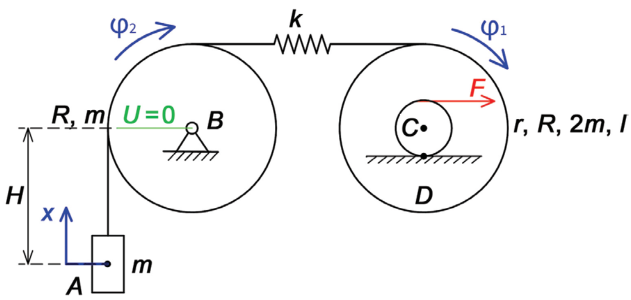
$$H = \frac{p_\varphi^2}{6mr^2} + \frac{p_x^2}{2m} + 2mgr + f\left(x,\varphi\right) + U\left(\varphi\right)$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{3mr^2} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = \dfrac{df\left(x,\varphi\right)}{d\varphi} + \dfrac{dU\left(\varphi\right)}{d\varphi} \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{df\left(x,\varphi\right)}{dx} \end{cases}$$

Zadanie 6.7.

Do współśrodkowego walca o masie $2m$, momencie bezwładności I, promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym $R = 3r$ toczącego się po płaszczyźnie pod wpływem przyłożonej siły zachowawczej F, której odpowiada energia potencjalna $U(\varphi_1)$, przymocowany jest za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k krążek o masie m i promieniu R. Do krążka przymocowana jest nierozciągliwa, nieważka nić, na której zawieszono ciężar o masie m, który w chwili początkowej znajduje się w odległości H od punktu B. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu, przedstawionego na rys. 6.7.



Rys. 6.7. Mechanizm do zadania 6.7

Rozwiązanie:

Porównując prędkości początku i końca linki, otrzymamy:

$$v_A = R\dot{\varphi}_2 = 3r\dot{\varphi}_2$$

Mechanizm przedstawiony na rys. 6.7 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione φ_1 i φ_2.

Walec porusza się ruchem płaskim, krążek wykonuje ruch obrotowy, a masa A porusza się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej walca, energii kinetycznej krążka i energii kinetycznej masy A. Oznaczmy walec jako (1), krążek jako (2) a masę A jako (3), stąd:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} 2mv_C^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B\dot{\varphi}_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} mv_A^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności krążka względem środka B:

$$I_B = \frac{1}{2}m\left(3r\right)^2 = \frac{9}{2}mr^2$$

W punkcie D znajduje się chwilowy środek obrotu dla walca, zatem prędkość środka walca jest równa:

$$v_C = r\dot{\varphi}_1$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}2mv_C^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 + mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{9}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{9}{2}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

$$T = \left(\frac{1}{2}I + mr^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{27}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą wzdłuż płaszczyzny. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości masy A, energii potencjalnej sprężystości i energii potencjalnej od siły zachowawczej $U(\varphi_1)$:

$$U = -mg\left(H - 3r\varphi_2\right) + \frac{1}{2}k\left(4r\varphi_1 - 3r\varphi_2\right)^2 + U\left(\varphi_1\right)$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \left(\frac{1}{2}I + mr^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{27}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2 + mg\left(H - 3r\varphi_2\right) - \frac{1}{2}k\left(4r\varphi_1 - 3r\varphi_2\right)^2 - U\left(\varphi_1\right)$$

Wyznaczamy pędy uogólnione sprzężone odpowiednio ze współrzędną φ_1 i φ_2 jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$:

$$p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(I + 2mr^2\right)\dot{\varphi}_1$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{27}{2}mr^2\dot{\varphi}_2$$

Z powyższych zależności wyznaczymy prędkości uogólnione $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ w funkcji pędu:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{p_{\varphi_1}}{\left(I + 2mr^2\right)}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{2p_{\varphi_2}}{27mr^2}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona i wyliczone prędkość $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od współrzędnych uogólnionych i od pędów:

$$H = \dot{\varphi}_1 p_{\varphi_1} + \dot{\varphi}_2 p_{\varphi_2} - L$$

$$H = \frac{p_{\varphi_1}^2}{\left(I + 2mr^2\right)} + \frac{2p_{\varphi_2}^2}{27mr^2} - \frac{1}{2}\left(I + 2mr^2\right)\frac{p_{\varphi_1}^2}{\left(I + 2mr^2\right)^2} - \frac{27}{4}mr^2\,\frac{4p_{\varphi_2}^2}{\left(27mr^2\right)^2} +$$
$$+ mg\left(H - 3r\varphi_2\right) + \frac{1}{2}k\left(4r\varphi_1 - 3r\varphi_2\right)^2 + U\left(\varphi_1\right)$$

$$H = \frac{p_{\varphi_1}^2}{2\left(I + 2mr^2\right)} + \frac{p_{\varphi_2}^2}{27mr^2} + mg\left(H - 3r\varphi_2\right) + \frac{1}{2}k\left(4r\varphi_1 - 3r\varphi_2\right)^2 + U\left(\varphi_1\right)$$

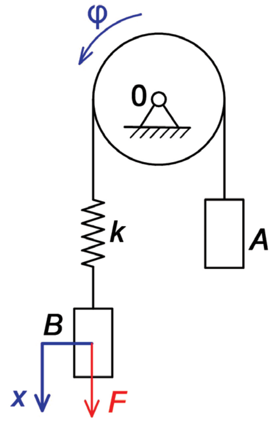
Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_1}} = \dfrac{p_{\varphi_1}}{\left(I + 2mr^2\right)} \\ \dot{p}_{\varphi_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_1} = -4kr^2\left(4\varphi_1 - 3\varphi_2\right) - \dfrac{dU\left(\varphi_1\right)}{d\varphi_1} \\ \dot{\varphi}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_2}} = \dfrac{2p_{\varphi_2}}{27mr^2} \\ \dot{p}_{\varphi_2} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_2} = -3mgr + 3kr^2\left(4\varphi_1 - 3\varphi_2\right) \end{cases}$$

Zadanie 6.8.

Na rys. 6.8 przedstawiono maszynę Atwooda składającą się z beztarciowego bloku o masie $3m$ i promieniu r, przez który przerzucono nieważką nić i zawieszono ciało A o masie $2m$ i ciało B o masie m za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k. Układ porusza się pod wpływem przyłożonej do ciała B siły zachowawczej

F, której odpowiada energia potencjalna $U(x)$. Znaleźć sformułowanie hamiltonowskie opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.8. Mechanizm do zadania 6.8

Rozwiązanie:

Można łatwo zauważyć, że w punkcie O znajduje się chwilowy środek obrotu walca, zatem prędkość masy A możemy zapisać jako:

$$v_A = r\dot{\varphi}$$

Mechanizm przedstawiony na rys. 6.8 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione – φ oraz x. Blok o środku O wykonuje ruch obrotowy, a masy A i B poruszają się ruchem postępowym.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej walca i energii kinetycznej mas A i B. Oznaczmy blok o środku O jako (1), masę A jako (2) i masę B jako (3), zatem:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2mv_A^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} mv_B^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności walca wokół punktu O:

$$I_O = \frac{1}{2} 3mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

Prędkość masy B jest równa:

$$v_B = \dot{x}$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$T = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{7}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej ciężkości mas A i B oraz energii potencjalnej pochodzącej od siły zachowawczej *F*:

$$U = mgx - 2mgr\varphi + \frac{1}{2} k \left(x - r\varphi \right)^2 + U\left(x \right)$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{7}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx + 2mgr\varphi - \frac{1}{2} k \left(x - r\varphi \right)^2 - U\left(x \right)$$

Wyznaczamy pędy uogólnione sprzężone odpowiednio ze współrzędną φ i x, jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{2} m r^2 \dot{\varphi}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

Z powyższych zależności wyznaczymy prędkości uogólnione $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ w funkcji pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{2 p_\varphi}{7 m r^2}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona, a wyliczone prędkość $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od współrzędnych uogólnionych i od pędów:

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{x} p_x - L$$

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{x} p_x - \frac{7}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx - 2mgr\varphi + \frac{1}{2} k\left(x - r\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

$$H = \frac{2 p_\varphi^2}{7mr^2} + \frac{p_x^2}{m} - \frac{7}{4} mr^2 \frac{4 p_\varphi^2}{\left(7mr^2\right)^2} - \frac{m}{2} \frac{p_x^2}{m^2} + mgx - 2mgr\varphi + \frac{1}{2} k\left(x - r\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

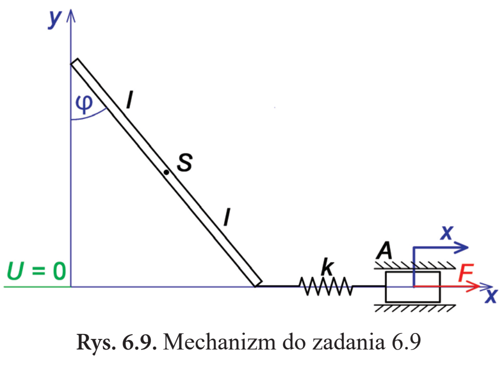
$$H = \frac{p_\varphi^2}{7mr^2} + \frac{p_x^2}{2m} + mgx - 2mgr\varphi + \frac{1}{2} k\left(x - r\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{2 p_\varphi}{7mr^2} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 2mg - kr\left(x - r\varphi\right) \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -mg - k\left(x - r\varphi\right) - \dfrac{dU\left(x\right)}{dx} \end{cases}$$

Zadanie 6.9.

Pręt o długości $2l$ i masie połączono za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k z suwakiem o masie $2m$, jak na rys. 6.9. Do suwaka przyłożono siłę zachowawczą F, której odpowiada energia potencjalna $U(x)$. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.9. Mechanizm do zadania 6.9

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.9 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione φ i *x*.

Pręt porusza się ruchem płaskim, a suwak wykonuje ruch postępowy.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta i energii kinetycznej suwaka A. Oznaczmy pręt jako (1), suwak jako (2), zatem:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 2 m v_A^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności pręta względem punktu A:

$$I_S = \frac{1}{12} m \left(2l\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A = \dot{x}$$

Współrzędne punktu S są równe:

$$x_S = l \sin\varphi \qquad y_S = l \cos\varphi$$
$$\dot{x}_S = l \cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l \sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu C jest równa:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$$

$$v_C^2 = \left(l \cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l \sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_C^2 = l^2 \dot{\varphi}^2$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + m v_A^2$$

$$T=\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+m\dot{x}^2$$

$$T=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+m\dot{x}^2$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną, przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt A. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości pręta, energii potencjalnej sprężystości i energii potencjalnej od siły zachowawczej $U(x)$:

$$U=mgl\cos\varphi+\frac{1}{2}k\left(x-2l\sin\varphi\right)^2+U\left(x\right)$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L=T-U$$

$$L=\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2+m\dot{x}^2-mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}k\left(x-2l\sin\varphi\right)^2-U\left(x\right)$$

Wyznaczamy pędy uogólnione sprzężone odpowiednio ze współrzędną φ i x jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$:

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=2m\dot{x}$$

Z powyższych zależności tworzymy układ równań i metodą podstawiania wyznaczymy prędkości uogólnione $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ w funkcji pędu:

$$\dot{\varphi}=\frac{3p_\varphi}{4ml^2}$$

$$\dot{x}=\frac{p_x}{2m}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona, a wyliczone prędkość $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od współrzędnych uogólnionych i od pędów:

$$H=\dot{\varphi}p_\varphi+\dot{x}p_x-L$$

$$H = \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{x}p_x - \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 - m\dot{x}^2 + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(x - 2l\sin\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

$$H = \frac{3p_\varphi^2}{4ml^2} + \frac{p_x^2}{2m} - \frac{2}{3}ml^2\left(\frac{3p_\varphi}{4ml^2}\right)^2 - m\left(\frac{p_x}{2m}\right)^2 + mgl\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{2}k\left(x - 2l\sin\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

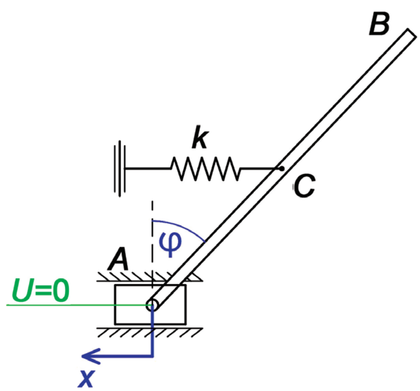
$$H = \frac{3p_\varphi^2}{8ml^2} + \frac{p_x^2}{4m} + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(x - 2l\sin\varphi\right)^2 + U\left(x\right)$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{3p_\varphi}{4ml^2} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi + 2klx\cos\varphi - 2kl^2\sin 2\varphi \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{2m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -k\left(x - 2l\sin\varphi\right) - \dfrac{dU\left(x\right)}{dx} \end{cases}$$

Zadanie 6.10.

Do pręta o długości $2l$ i masie dołączono przegubowo suwak o masie $3m$, jak pokazano na rys. 6.10. Środek pręta połączony jest ze sprężynką o współczynniku sztywności k. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.10. Mechanizm do zadania 6.10

Rozwiązanie:
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.10 ma dwa stopnie swobody, przyjmijmy zatem dwie współrzędne uogólnione φ i x. Przyjmijmy dodatni kierunek w prawo.

Pręt porusza się ruchem płaskim, a suwak wykonuje ruch postępowy.

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej pręta i energii kinetycznej suwaka A. Oznaczmy pręt jako (1), suwak jako (2), więc:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 3 m v_A^2$$

Wyznaczymy moment bezwładności pręta względem punktu A:

$$I_A = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

W punkcie D znajduje się chwilowy środek obrotu dla walca, zatem prędkość środka walca jest równa:

$$v_C = r\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu A jest równa:

$$v_A = -\dot{x}$$

Współrzędne punktu C są równe:

$$x_C = -x + l\sin\varphi \qquad y_C = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_C = -\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_C = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

Prędkość punktu C jest równa:

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$$

$$v_C^2 = \left(-\dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Wstawiając wyliczone prędkości i moment bezwładności do wzoru na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{3}{2} m v_A^2$$

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi \right) + \frac{3}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 m \dot{x}^2 - m l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi$$

Aby wyznaczyć energię potencjalną przyjmijmy linię zerowego potencjału przechodzącą przez punkt A. Energia potencjalna naszego mechanizmu będzie sumą energii potencjalnej ciężkości pręta i energii potencjalnej sprężystości:

$$U = mgl \cos\varphi + \frac{1}{2} k x^2$$

Funkcja Lagrange'a jest równa:

$$L = T - U$$

$$L = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 m \dot{x}^2 - m l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi - mgl \cos\varphi - \frac{1}{2} k x^2$$

Wyznaczamy pędy uogólnione sprzężone odpowiednio ze współrzędną φ i x jako pochodne funkcji Lagrange'a po prędkości uogólnionej $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi} - m l \dot{x} \cos\varphi$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 4 m \dot{x} - m l \dot{\varphi} \cos\varphi$$

Z powyższych zależności tworzymy układ równań i metodą podstawiania wyznaczymy prędkości uogólnione $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ w funkcji pędu:

$$\dot{\varphi} = \frac{12 p_\varphi + 3 p_x l \cos\varphi}{m l^2 \left(16 - 3\cos^2\varphi \right)}$$

$$\dot{x} = \frac{4 p_x l + 3 p_\varphi \cos\varphi}{m l \left(16 - 3\cos^2\varphi \right)}$$

Zapiszemy funkcję Hamiltona, a wyliczone prędkości $\dot{\varphi}$ i $\dot{x}$ wstawimy do hamiltonianu, aby uzyskać funkcję zależną od współrzędnych uogólnionych i od pędów:

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{x} p_x - L$$

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{x} p_x - \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 - 2m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2$$

Zauważmy, że $\frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 2m\dot{x}^2 - ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi} p_\varphi + x p_x\right)$, wówczas nasz hamiltonian przyjmie postać:

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi} p_\varphi + \dot{x} p_x\right) + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{12 p_\varphi^2 + 3 p_x p_\varphi l\cos\varphi}{ml^2\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)} + \frac{4 p_x^2 l + 3 p_\varphi p_x \cos\varphi}{ml\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)}\right) + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2$$

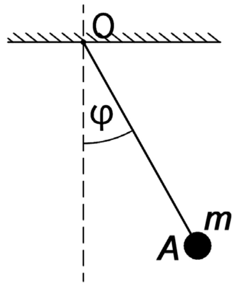
$$H = \frac{6 p_\varphi^2 + 3 p_x p_\varphi l\cos\varphi + 4 p_x^2 l}{ml^2\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)} + mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{12 p_\varphi + 3 p_x l\cos\varphi}{ml^2\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = \dfrac{3 p_x p_\varphi l\cos\varphi\left(16 - 3\cos^2\varphi\right) + 3\sin 2\varphi\left(6 p_\varphi^2 + 3 p_x p_\varphi l\cos\varphi + 4 p_x^2 l\right)}{ml^2\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)^2} + \\ \qquad + mgl\sin\varphi \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{4 p_x l + 3 p_\varphi \cos\varphi}{ml\left(16 - 3\cos^2\varphi\right)} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases}$$

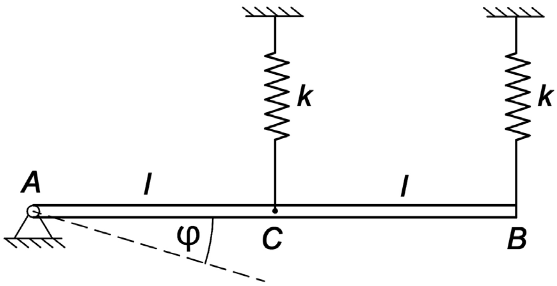
6.7. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

Zadanie 6.11.
Dane jest wahadło matematyczne przedstawione na rys. 6.11 o długości l i masie m. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujące jego ruch. Porównać otrzymane rozwiązanie z formalizmem Lagrange'a.



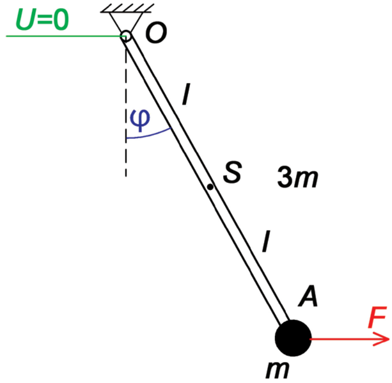
Rys. 6.11. Mechanizm do zadnia 6.11

Zadanie 6.12.
Pręt o masie $2m$ i długości $2l$ zamocowano w punkcie A, jak pokazano na rys. 6.12. Na środku i końcu pręta zostały dołączone dwie sprężynki o współczynniku sztywności k. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujące jego ruch. Porównać otrzymane rozwiązanie z formalizmem Lagrange'a.



Rys. 6.12. Mechanizm do zadnia 6.12

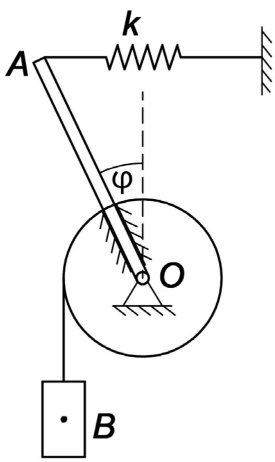
Zadanie 6.13.
Na końcu wahadła fizycznego o masie $3m$ i długości $2l$, przedstawionego na rys. 6.13, zamocowano punkt materialny o masie m. Dodatkowo w punkcie A przyłożono siłę zachowawczą F, której odpowiada energia potencjalna $U(\varphi)$. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujące jego ruch.



Rys. 6.13. Mechanizm do zadnia 6.13

Zadanie 6.14.

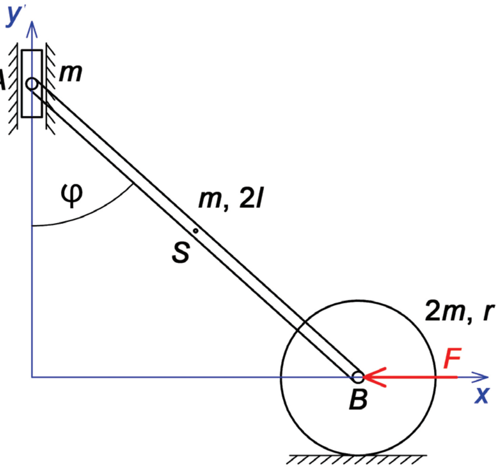
Mechanizm przedstawiony na rys. 6.14 składa się z połączonych razem krążka o masie m i promieniu r oraz korby o masie $2m$ i długości $3r$. Do krążka przymocowano za pomocą nieważkiej, nierozciagliwej nici cialo B o masie m. Koniec pręta zamocowany jest do sprężyny o współczynniku sztywności k. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujace ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.14. Mechanizm do przykładu 6.14

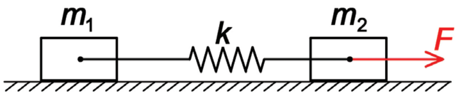
Zadanie 6.15.

W mechanizmie przedstawionym na rys. 6.15 pręt AB o długości $2l$ i masie m jest połączony przegubowo z walcem w punkcie B o promieniu r i masie $2m$, a w punkcie A z suwakiem o masie m. Do walca przyłożono siłę zachowawczą F, której odpowiada energia potencjalna $U(\varphi)$. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujace ruch tego mechanizmu.



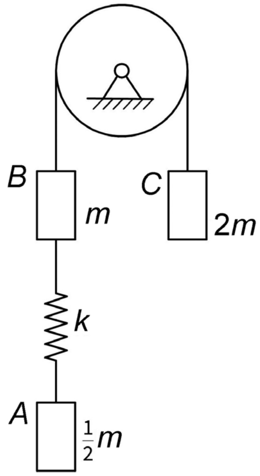
Rys. 6.15. Mechanizm do zadnia 6.15

Zadanie 6.16.
Dwa ciała o masach m_1 i m_2 połączone sprężyną o współczynniku sztywności k, pokazane na rys. 6.16, poruszają się po gładkiej powierzchni pod wpływem poziomo przyłożonej siły zachowawczej F, której odpowiada energia potencjalna $U(x_2)$. Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujace ruch tego mechanizmu.



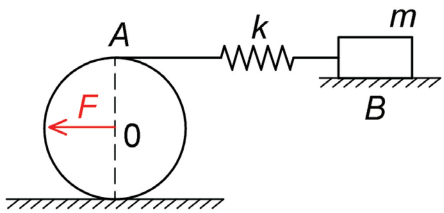
Rys. 6.16. mechanizm do zadnia 6.16

Zadanie 6.17.
Na rys. 6.17 przedstawiono maszynę Atwooda składającą się z gładkiego bloku o zaniedbywalnej masie i wymiarach, przez który przerzucono nieważką, nierozciągliwą nić i zawieszono ciała o masie $2m$ i m. Do ciała o mniejszej masie zamocowano kolejne ciało o masie $\frac{1}{2}m$ za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k. Znaleźć sformułowanie hamiltonowskie opisujące ruch tego mechanizmu.



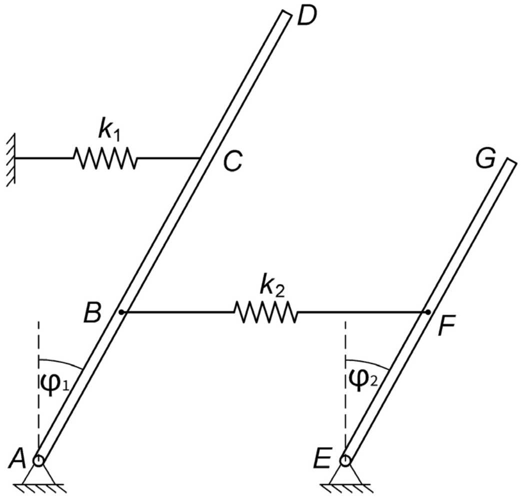
Rys. 6.17. Mechanizm do zadnia 6.17

Zadanie 6.18.
Do walca o masie $4m$ i promieniu toczącego się po płaszczyźnie pod wpływem przyłożonej siły zachowawczej F, której odpowiada energia potencjalna $U(\varphi)$ przymocowane jest za pomocą sprężynki o współczynniku sztywności k ciało B o masie m. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu, przedstawionego na rys. 6.18.



Rys. 6.18. Mechanizm do zadania 6.18

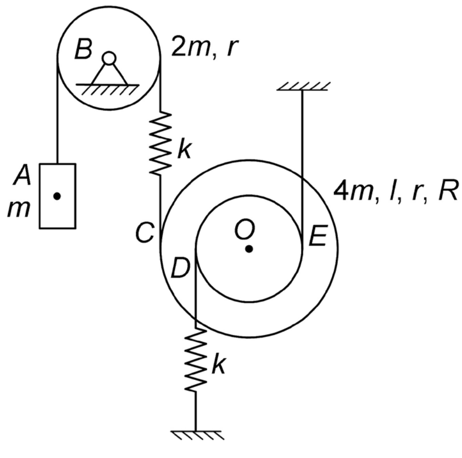
Zadanie 6.19.
Dwa pręty AD i EG zamocowano i połączono sprężynkami, jak pokazano na rys. 6.19. Masa pręta AD jest równa $3m$ i długość wynosi $3l$, natomiast masa pręta AD jest równa $2m$ i długość wynosi $2l$. Wiemy, że |AB| = |BC| = |CD| = |EF| = |FG|. Współczynniki sztywności sprężyn są równe: $k_1 = 2k$, $k_2 = k$. Znaleźć kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch tego mechanizmu.



Rys. 6.19. Mechanizm do zadnia 6.19

Zadanie 6.20.

Zapisać kanoniczne równania Hamiltona opisujące ruch mechanizmu przedstawionego na rys. 6.20. Zakładamy, że linki są nieważkie i nierozciągliwe oraz że nie występuje tarcie linek o bloki. Przyjąć dane: m, I, r, $R = 2r$, k.

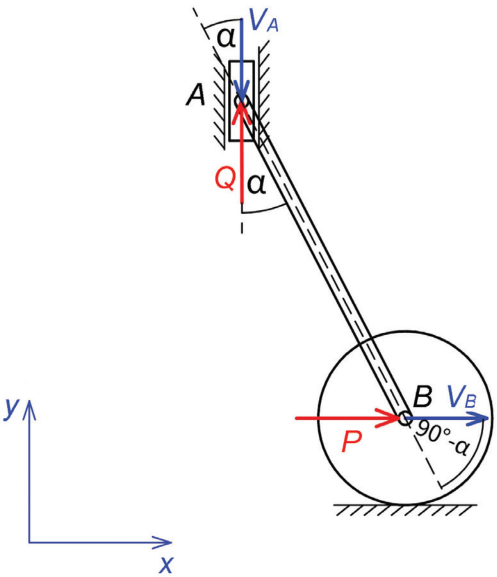


Rys. 6.20. Mechanizm do zadania 6.20

VII. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

7.1. ODPOWIEDZI DO ROZDZIAŁU II

Zadanie 2.16.



Rys. 2.16a

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos (90° - \alpha)$$

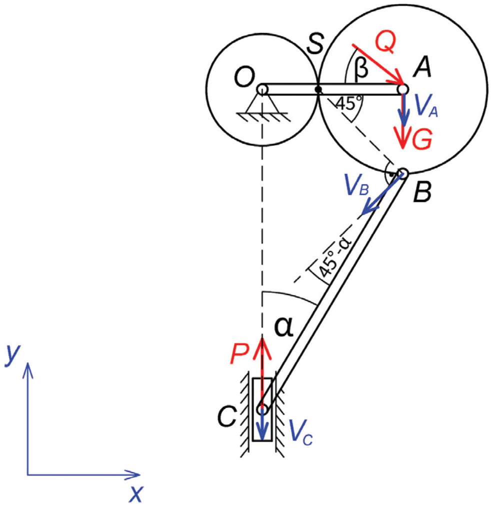
$$v_A = v_B \mathrm{tg}\alpha$$

$$(P, 0) \cdot (v_B, 0) + (0, Q) \cdot (0, -v_A) = 0$$

$$Pv_B - Qv_A = 0$$

$$Q = P\mathrm{ctg}\alpha$$

Zadanie 2.17.



Rys. 2.17a

Chwilowy środek obrotu dla krążka o środku A znajduje się w punkcie S, zatem:

$$v_B = \sqrt{2} v_A$$

Z rzutu prędkości na kierunek pręta BC mamy:

$$v_B \cos\left(45° - \alpha\right)\ v_C \cos\alpha$$

$$v_C = \frac{\sqrt{2} v_A \cos\left(45° - \alpha\right)}{\cos\alpha}$$

$$\left(Q\cos\beta, -Q\sin\beta\right)\cdot\left(0, -v_A\right) + \left(0, -G\right)\cdot\left(0, -v_A\right) + \left(0, P\right)\cdot\left(0, -v_C\right) = 0$$

$$Q\sin\beta v_A + G v_A - P v_C = 0$$

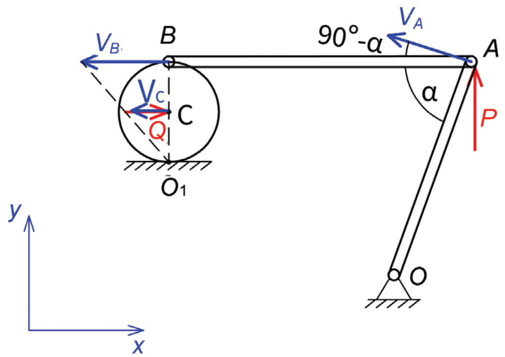
$$Q\sin\beta v_A + G v_A - P\frac{\sqrt{2} v_A \cos\left(45° - \alpha\right)}{\cos\alpha} = 0$$

$$\left(Q\sin\beta + G - P\frac{\sqrt{2}\cos\left(45° - \alpha\right)}{\cos\alpha}\right) v_A = 0$$

$$Q\sin\beta + G - P\frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha} = 0$$

$$P = \frac{(Q\sin\beta + G)\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)}$$

Zadanie 2.18.



Rys. 2.18a

Z twierdzenia o rzutach prędkości na kierunek pręta AB:

$$v_A \cos(90^\circ - \alpha) = v_B$$

$$v_A \sin\alpha = v_B$$

Chwilowy środek prędkości dla walca znajduje się w punkcie O_1, zatem:

$$v_C = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}v_A \sin\alpha$$

$$(Q,0)\cdot(-v_C,0) + (0,P)\cdot(-v_A\sin\alpha, v_A\cos\alpha) = 0$$

$$-Qv_C + Pv_A\cos\alpha = 0$$

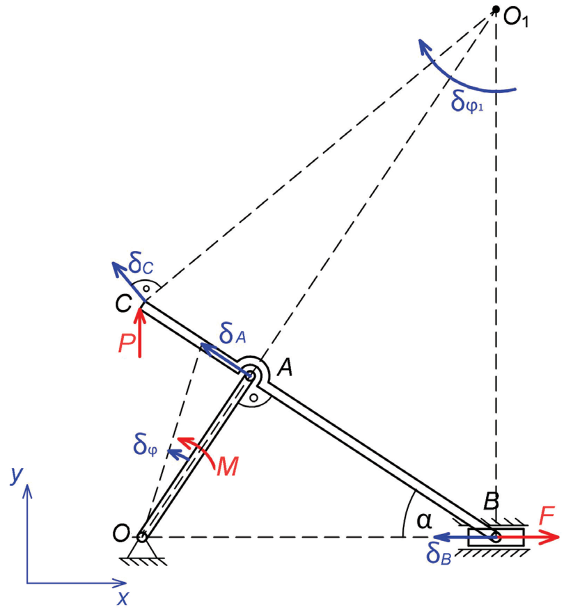
$$-Q\frac{1}{2}v_A\sin\alpha + Pv_A\cos\alpha = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}Q\sin\alpha + P\cos\alpha\right)v_A = 0$$

$$-\frac{1}{2}Q\sin\alpha + P\cos\alpha = 0$$

$$Q = \frac{2P\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2P\mathrm{ctg}\alpha$$

Zadanie 2.19.



Rys. 2.19a

$$\Delta ABO_1 \sim \Delta ABO \sim \Delta OBO_1 \text{ zatem } |O_1A| = \frac{|AB|^2}{|OA|} = \frac{9}{2}l, |O_1B| = \frac{3\sqrt{13}}{2}l$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla ΔACO_1: $|O_1C| = \frac{\sqrt{85}}{2}l$

$$\delta_A = |OA|\delta\varphi = 2l\delta\varphi$$

$$\delta_A = |O_1A|\delta\varphi_1 = \frac{9}{2}l\delta\varphi_1$$

$$\frac{9}{2}l\delta\varphi_1 = 2l\delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \frac{4}{9}\delta\varphi$$

$$\delta_B = |O_1B|\delta\varphi_1 = \frac{3\sqrt{13}}{2}l\delta\varphi_1 = \frac{2\sqrt{13}}{3}l\delta\varphi$$

$$\delta_C = |O_1C|\delta\varphi_1 = \frac{\sqrt{85}}{2}l\delta\varphi_1 = \frac{2\sqrt{85}}{9}l\delta\varphi$$

Niech $|\measuredangle AO_1C| = \beta$, zatem $\cos\beta = \frac{9}{\sqrt{85}}$.

$$M\delta\varphi+\left(0,P\right)\cdot\left(-\delta_C\sin\beta,\delta_C\cos\beta\right)+\left(F,0\right)\cdot\left(-\delta_B,0\right)=0$$

$$M\delta\varphi+P\cos\beta\delta_C-F\delta_B=0$$

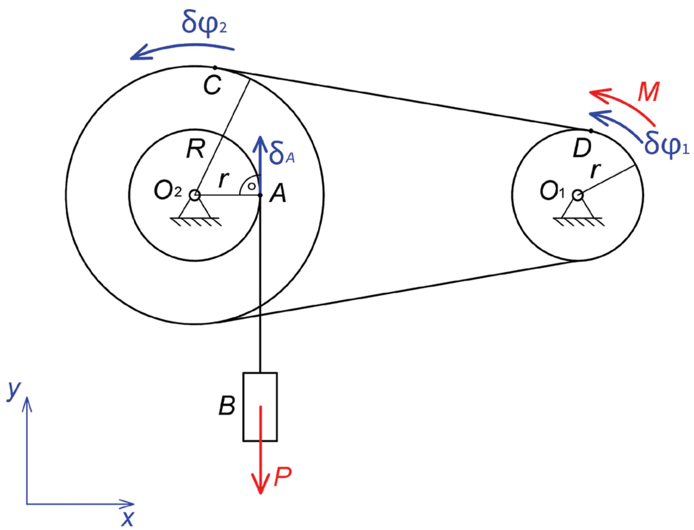
$$M\delta\varphi-P\cos\beta\frac{2\sqrt{85}}{9}l\delta\varphi-F\frac{2\sqrt{13}}{3}l\delta\varphi=0$$

$$\left(M-P\frac{9}{\sqrt{85}}\frac{2\sqrt{85}}{9}l-F\frac{2\sqrt{13}}{3}l\right)\delta\varphi=0$$

$$M-2Pl-Fl\frac{2\sqrt{13}}{3}=0$$

$$F=\frac{3\left(M-2Pl\right)}{2l\sqrt{13}}$$

Zadanie 2.20.



Rys. 2.20a

$$v_C=v_D$$

$$R\delta\varphi_2=r\delta\varphi_1$$

$$\delta\varphi_2=\frac{r}{R}\delta\varphi_1$$

$$\delta_A = r\delta\varphi_2 = \frac{r^2}{R}\delta\varphi_1$$

$$M\delta\varphi_1 + (0, -P)\cdot(0, \delta_A) = 0$$

$$M\delta\varphi_1 - P\delta_A = 0$$

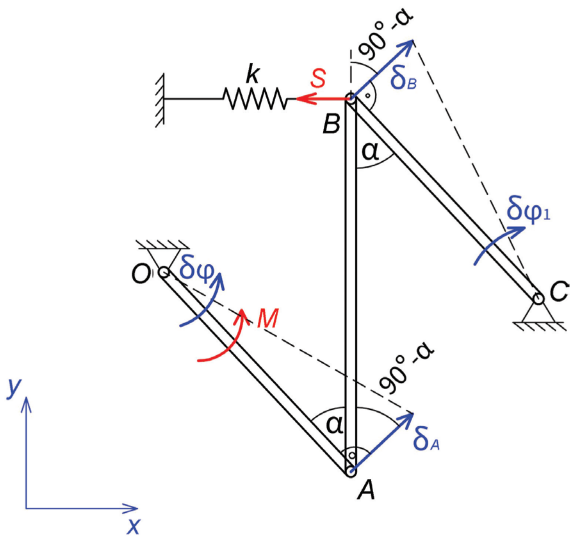
$$M\delta\varphi_1 - P\frac{r^2}{R}\delta\varphi_1 = 0$$

$$\left(M - P\frac{r^2}{R}\right)\delta\varphi_1 = 0$$

$$M - P\frac{r^2}{R} = 0$$

$$P = \frac{MR}{r^2}$$

Zadanie 2.21.



Rys. 2.21a

$$\delta_A = |\mathrm{OA}|\delta\varphi = d\delta\varphi$$

$$\delta_B = |\mathrm{BC}|\delta\varphi 1 = d\delta\varphi_1$$

Brak chwilowego środka obrotu dla pręta AB w tym położeniu, zatem δA = δB, $\delta\varphi = \delta\varphi_1$.

$$M\delta\varphi + (-S, 0) \cdot (\delta_B \cos\alpha, \delta_B \sin\alpha) = 0$$

$$M\delta\varphi - S\,\delta_B \cos\alpha = 0$$

$$M\delta\varphi - S\,\delta_B \cos\alpha\, d\delta\varphi = 0$$

$$(M - Sd\cos\alpha)\,\delta\varphi = 0$$

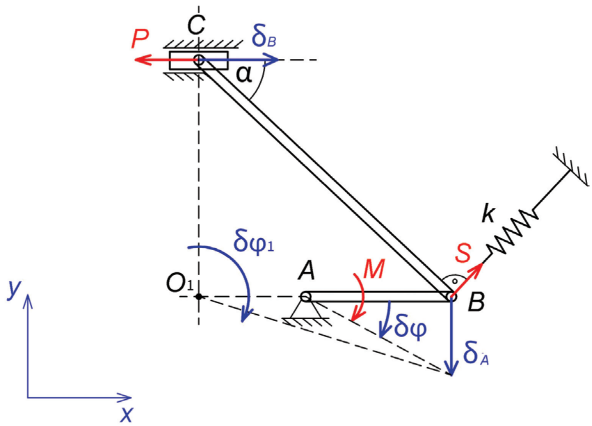
$$M - Sd\cos\alpha = 0$$

$$S = kh$$

$$M - khd\cos\alpha = 0$$

$$h = \frac{M}{kd\cos\alpha}$$

Zadanie 2.22.



Rys. 2.22a

$$\delta_A = |AB|\delta\varphi = l\delta\varphi$$

$$\delta_A = |O_1B|\delta\varphi = 3l\cos\alpha\delta\varphi_1$$

$$3l\cos\alpha\delta\varphi_1 = l\delta\varphi \quad\Rightarrow\quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta\varphi}{3\cos\alpha}$$

$$\delta_B = |O_1C|\delta\varphi_1 = 3l\sin\alpha\delta\varphi_1 = l\text{tg}\alpha\delta\varphi$$

$$M\delta\varphi + (S\sin\alpha, S\cos\alpha)\cdot(0,-\delta_A) + (-P,0)\cdot(\delta_B,0) = 0$$

$$M\delta\varphi - S\cos\alpha\delta_A - P\delta_B = 0$$

$$M\delta\varphi - S\cos\alpha l\delta\varphi - Pl\text{tg}\alpha\delta\varphi = 0$$

$$(M - Sl\cos\alpha - Pl\text{tg}\alpha)\delta\varphi = 0$$

$$M - Sl\cos\alpha - Pl\text{tg}\alpha = 0$$

$$S = kh$$

$$P = \frac{M - khl\cos\alpha}{l\text{tg}\alpha}$$

Zadanie 2.23.

$$(T,0)\cdot(\delta x,0) + (0,Q)\cdot(0,\delta y_1) + (0,P)\cdot(0,\delta y_2) = 0$$

$$T\delta x + Q\delta y_1 + P\delta y_2 = 0$$

$$T = \mu N \qquad N = P$$

Równanie więzu: $x + 2y_1 + y_2 = \text{const}$

$$\delta x + 2\delta y_1 + \delta y_2 = 0$$

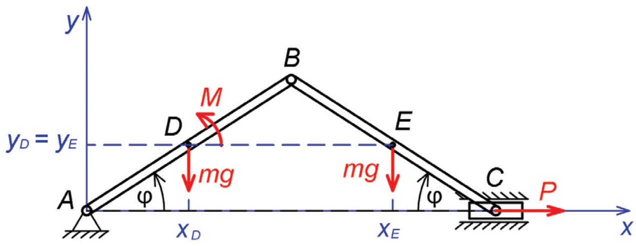
$$\delta x = -2\delta y_1 - \delta y_2$$

$$(-2\mu P + Q)\delta y_1 + (-\mu P + P)\delta y_2 = 0$$

$$-2\mu P + Q = 0 \;\Rightarrow\; Q = 2\mu P$$

$$-\mu P + P = 0 \Rightarrow \;\mu = 1$$

Zadanie 2.24.



Rys. 2.24a

$$y_D = y_E = d\sin\varphi \qquad x_C = 4d\cos\varphi$$

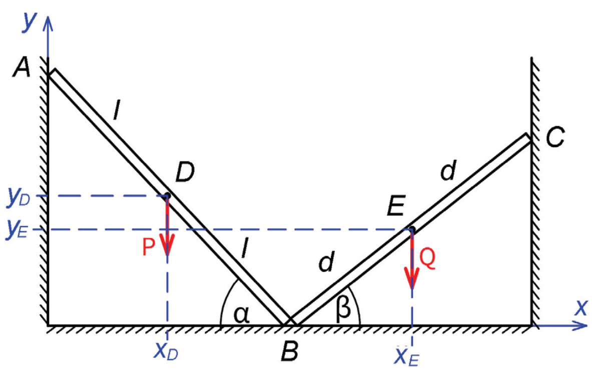
$$\delta y_D = \delta y_E = d\cos\varphi\delta\varphi \qquad \delta x_C = -4d\sin\varphi\delta\varphi$$

$$M\delta\varphi + (0,-mg)\cdot(\delta x_D,\delta y_D) + (0,-mg)\cdot(\delta x_E,\delta y_E) + (P,0)\cdot(\delta x_C,\delta y_C) = 0$$

$$M\delta\varphi - mg\delta y_D - mg\delta y_E + P\delta x_C = 0$$

$$P = \frac{M - 2mgd\cos\varphi}{4d\sin\varphi}$$

Zadanie 2.25.



Rys. 2.25a

$$y_D = l\sin\alpha \qquad y_E = d\sin\beta$$
$$\delta y_D = l\cos\alpha\delta\alpha \qquad \delta y_E = d\cos\beta\delta\beta$$

$$(0,-P)\cdot(\delta x_D,\delta y_D) + (0,-Q)\cdot(\delta x_E,\delta y_E) = 0$$

$$P\delta y_D - Q\delta y_E = 0$$

$$Pl\cos\alpha\delta\alpha - Qd\cos\beta\delta\beta = 0$$

Równanie więzu: $2l\cos\alpha + 2d\cos\beta = \text{const}$

$$-2l\sin\alpha\delta\alpha - 2d\sin\beta\delta\beta = 0$$

$$\delta\beta = \frac{-2l\sin\alpha\delta\alpha}{2d\sin\beta}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\text{ctg}\beta}{\text{ctg}\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}$$

Zadanie 2.26.

$$y_A = d\cos\alpha$$

$$y_B = 2d\cos\alpha + d\cos\beta$$

$$y_C = 2d\cos\alpha + 2d\cos\beta + d\cos\gamma$$

$$\delta y_A = -d\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\delta y_B = -2d\sin\alpha\delta\alpha - d\sin\beta\,\delta\beta$$

$$\delta y_C = -2d\sin\alpha\delta\alpha - 2d\sin\beta\,\delta\beta - d\sin\gamma\,\delta\gamma$$

$$(0, mg)\cdot(\delta x_A, \delta y_A) + (0, mg)\cdot(\delta x_B, \delta y_B) + (0, mg)\cdot(\delta x_C, \delta y_C) - M\delta\gamma = 0$$

$$mg\delta y_A + mg\delta y_B + mg\delta y_C - M\delta\gamma = 0$$

$$mg(\delta y_A + \delta y_B + \delta y_C) - M\delta\gamma = 0$$

$$mg(-5d\sin\alpha\delta\alpha - 3d\sin\beta\,\delta\beta - d\sin\gamma\,\delta\gamma) - M\delta\gamma = 0$$

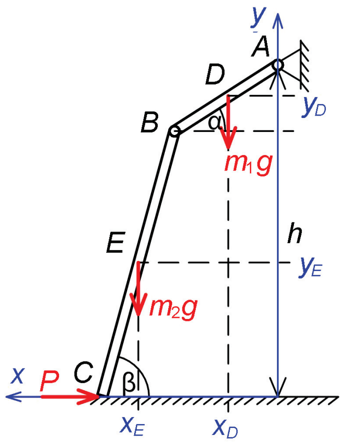
$$-5mgd\sin\alpha\delta\alpha - 3mgd\sin\beta\,\delta\beta + (-mgd\sin\gamma - M)\delta\gamma = 0$$

$$Q_\alpha = -5mgd\sin\alpha$$

$$Q_\beta = -3mgd\sin\beta$$

$$Q_\gamma = -mgd\sin\gamma - M$$

Zadanie 2.27.



Rys. 2.27a

$$y_E = 2d\sin\beta \qquad \delta y_E = 2d\cos\beta\delta\beta$$
$$y_D = 4d\sin\beta + d\sin\alpha \qquad \delta y_D = 4d\cos\beta\delta\beta + d\cos\alpha\delta\alpha$$
$$x_C = 2d\cos\alpha + 4d\cos\beta \qquad \delta x_C = -2d\sin\alpha\delta\alpha - 4d\sin\beta\delta\beta$$

$$y_A = 4d\sin\beta + 2d\sin\alpha$$

Równanie więzu: $y_A = h$

$$4d\sin\beta + 2d\sin\alpha = h = \text{const}$$

$$4d\cos\beta\delta\beta + 2d\cos\alpha\delta\alpha = 0$$

$$\delta\alpha = \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}\delta\beta$$

$$(0,-m_1g)\cdot(\delta x_D,\delta y_D) + (0,-m_2g)\cdot(\delta x_E,\delta y_E) + (-P,0)\cdot(\delta x_C,0) = 0$$

$$-m_1g\delta y_D - m_2g\delta y_E - P\delta x_C = 0$$

$$m_1g(4\cos\beta\delta\beta + \cos\alpha\delta\alpha) + 2m_2g\cos\beta\delta\beta - 2P(\sin\alpha\delta\alpha + 2\sin\beta\delta\beta) = 0$$

$$(4m_1g\cos\beta + 2m_2g\cos\beta - 4P\sin\beta)\delta\beta + (m_1g\cos\alpha - 2P\sin\alpha)\delta\alpha = 0$$

$$\left(4m_1 g\cos\beta + 2m_2 g\cos\beta - 4P\sin\beta\right)\delta\beta + \left(m_1 g\cos\alpha - 2P\sin\alpha\right)\frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}\delta\beta = 0$$

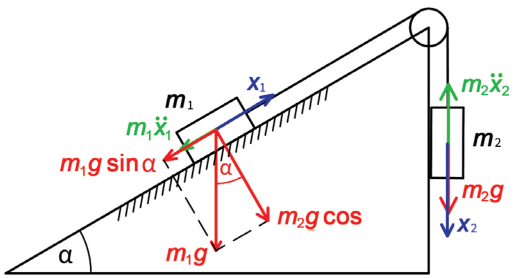
$$\left(6m_1 g\cos\beta + 2m_2 g\cos\beta - 4P\sin\beta - 4P\mathrm{tg}\alpha\cos\beta\right)\delta\beta = 0$$

$$\left(3m_1 g + m_2 g\right)\cos\beta - 2P\left(\sin\beta + \mathrm{tg}\alpha\cos\beta\right) = 0$$

$$P = \frac{g\left(3m_1 + m_2\right)}{2\left(\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha\right)}$$

7.2. ODPOWIEDZI DO ROZDZIAŁU III

Zadanie 3.10.



Rys. 3.10a

Równanie więzu: $x_1 = x_2$
x_1 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = \delta x_2$$

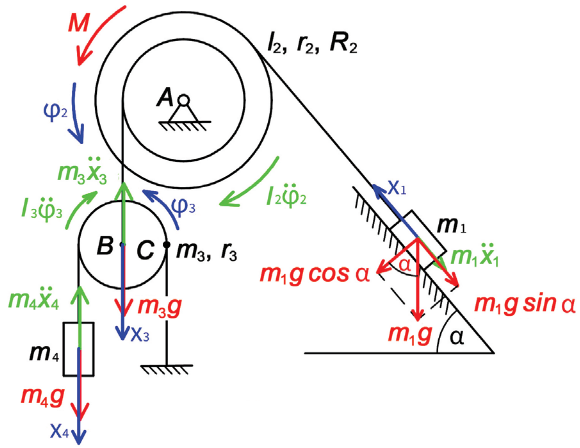
$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(m_2 g - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 + m_2 g\right)\delta x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{m_2 g - m_1 g\sin\alpha}{m_1 + m_2}$$

Zadanie 3.11.



Rys. 3.11a

Równania więzów: $x_1 = R_2\varphi_2$, $r_2\varphi_2 = r_3\varphi_3$, $x_3 = r_3\varphi_3$, $x_4 = 2r_3\varphi_3$
φ_3 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = \frac{R_2 r_3}{r_2}\delta\varphi_3,\ \ \delta\varphi_2 = \frac{r_3}{r_2}\delta\varphi_3,\ \ \delta x_3 = r_3\delta\varphi_3,\ \ \delta x_4 = 2r_3\delta\varphi_3$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{R_2 r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ \ddot{\varphi}_2 = \frac{r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ \ddot{x}_3 = r_3\ddot{\varphi}_3,\ \ \ddot{x}_4 = 2r_3\ddot{\varphi}_3$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 +$$
$$+\left(m_3 g - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 + \left(m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\frac{R_2 r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{R_2 r_3}{r_2}\delta\varphi_3 + \left(M - I_2\frac{r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{r_3}{r_2}\delta\varphi_3 + \left(-\frac{m_3 r_3^2}{2}\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3$$
$$+\left(m_3 g - m_3 r_3\ddot{\varphi}_3\right)r_3\delta\varphi_3 + \left(m_4 g - m_4 2r_3\ddot{\varphi}_3\right)2r_3\delta\varphi_3 = 0$$

$$\left(m_1\frac{R_2^2 r_3}{r_2^2} + \frac{I_2 r_3}{r_2^2} + \frac{3m_3 r_3}{2} + 4m_4 r_3\right)\ddot{\varphi}_3 = -m_1 g\frac{R_2}{r_2}\sin\alpha + \frac{M}{r_2} + m_3 g + 2m_4 g$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{r_2\left(-m_1 g R_2\sin\alpha + M + m_3 g r_2 + 2m_4 g r_2\right)}{r_3\left(m_1 R_2^2 + I_2 + 1.5m_3 r_2^2 + 4m_4 r_2^2\right)}$$

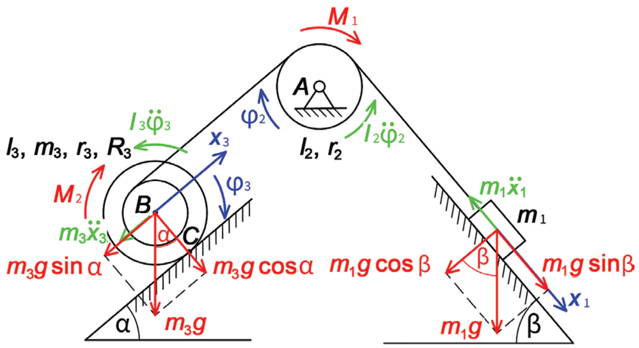
$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{-m_1 g R_2 \sin\alpha + M + m_3 g r_2 + 2 m_4 g r_2}{m_1 R_2^2 + I_2 + 1.5 m_3 r_2^2 + 4 m_4 r_2^2}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{R_2\left(-m_1 g R_2 \sin\alpha + M + m_3 g r_2 + 2 m_4 g r_2\right)}{m_1 R_2^2 + I_2 + 1.5 m_3 r_2^2 + 4 m_4 r_2^2}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{r_2\left(-m_1 g R_2 \sin\alpha + M + m_3 g r_2 + 2 m_4 g r_2\right)}{m_1 R_2^2 + I_2 + 1.5 m_3 r_2^2 + 4 m_4 r_2^2}$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{2r_2\left(-m_1 g R_2 \sin\alpha + M + m_3 g r_2 + 2 m_4 g r_2\right)}{m_1 R_2^2 + I_2 + 1.5 m_3 r_2^2 + 4 m_4 r_2^2}$$

Zadanie 3.12.



Rys. 3.12a.

Równania więzów: $x_1 = r_2\varphi_2$, $r_2\varphi_2 = (r_3 + R_3)\varphi_3$, $x_3 = R_3\varphi_3$
φ_3 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = \left(r_3 + R_3\right)\delta\varphi_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{\left(r_3 + R_3\right)}{r_2}\delta\varphi_3,\ \delta x_3 = R_3\delta\varphi_3$$

$$\ddot{x}_1 = \left(r_3 + R_3\right)\ddot{\varphi}_3,\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{\left(r_3 + R_3\right)}{r_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ddot{x}_3 = R_3\ddot{\varphi}_3$$

$$\left(m_1 g \sin\beta - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M_1 - I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(M_2 - I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 +$$
$$+\left(m_3 g \sin\alpha - m_3\ddot{x}_3\right)\delta x_3 = 0$$

$$\left(m_1 g\sin\beta - m_1\left(r_3+R_3\right)\ddot{\varphi}_3\right)\left(r_3+R_3\right)\delta\varphi_3 + \left(M_1 - I_2\frac{\left(r_3+R_3\right)}{r_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{\left(r_3+R_3\right)}{r_2}\delta\varphi_3$$
$$+\left(M_2 - I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(m_3 g\sin\alpha - m_3R_3\ddot{\varphi}_3\right)R_3\delta\varphi_3 = 0$$

$$\left(m_1\left(r_3+R_3\right)^2 + \frac{I_2\left(r_3+R_3\right)^2}{r_2^2} + I_3 + m_3R_3^2\right)\ddot{\varphi}_3 = m_1 g\sin\beta\left(r_3+R_3\right)+$$
$$+\frac{M_1\left(r_3+R_3\right)}{r_2} + M_2 - m_3R_3 g\sin\alpha$$

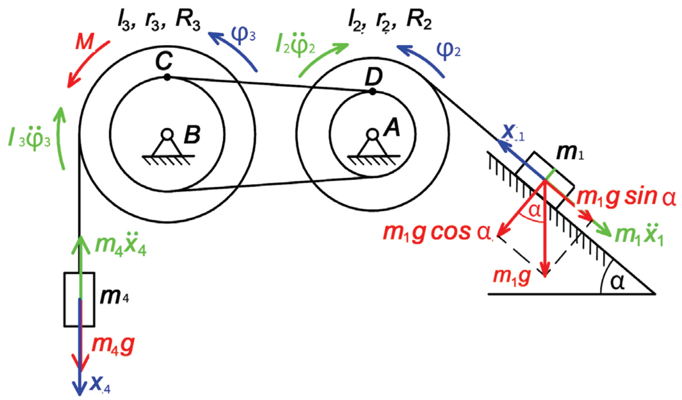
$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{m_1 g\sin\beta\left(r_3+R_3\right) + \dfrac{M_1\left(r_3+R_3\right)}{r_2} + M_2 - m_3R_3 g\sin\alpha}{m_1\left(r_3+R_3\right)^2 + \dfrac{I_2\left(r_3+R_3\right)^2}{r_2^2} + I_3 + m_3R_3^2}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\left(r_3+R_3\right)\left(m_1 g\sin\beta\left(r_3+R_3\right) + \dfrac{M_1\left(r_3+R_3\right)}{r_2} + M_2 - m_3R_3 g\sin\alpha\right)}{r_2\left(m_1\left(r_3+R_3\right)^2 + \dfrac{I_2\left(r_3+R_3\right)^2}{r_2^2} + I_3 + m_3R_3^2\right)}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{\left(r_3+R_3\right)\left(m_1 g\sin\beta\left(r_3+R_3\right) + \dfrac{M_1\left(r_3+R_3\right)}{r_2} + M_2 - m_3R_3 g\sin\alpha\right)}{m_1\left(r_3+R_3\right)^2 + \dfrac{I_2\left(r_3+R_3\right)^2}{r_2^2} + I_3 + m_3R_3^2}$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{R_3\left(m_1 g\sin\beta\left(r_3+R_3\right) + \dfrac{M_1\left(r_3+R_3\right)}{r_2} + M_2 - m_3R_3 g\sin\alpha\right)}{m_1\left(r_3+R_3\right)^2 + \dfrac{I_2\left(r_3+R_3\right)^2}{r_2^2} + I_3 + m_3R_3^2}$$

Zadanie 3.13.



Rys. 3.13a

Równania więzów: $x_1 = R_2\varphi_2$, $r_2\varphi_2 = r_3\varphi_3$ $(v_C = v_D)$, $x_4 = R_3\varphi_3$
φ_3 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = \frac{R_2 r_3}{r_2}\delta\varphi_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{r_3}{r_2}\delta\varphi_3,\ \delta x_4 = R_3\delta\varphi_3$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{R_2 r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3,\ \varphi_4 = R_3\ddot{\varphi}_3$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(M - I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\frac{R_2 r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{R_2 r_3}{r_2}\delta\varphi_3 + \left(-I_2\frac{r_3}{r_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{r_3}{r_2}\delta\varphi_3 + \left(M - I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 +$$
$$+\left(m_4 g - m_4 R_3\ddot{\varphi}_3\right)R_3\delta\varphi_3 = 0$$

$$\left(m_1\frac{R_2^2 r_3^2}{r_2^2} + \frac{I_2 r_3^2}{r_2^2} + I_3 + m_4 R_3^2\right)\ddot{\varphi}_3 = -m_1 g\frac{R_2 r_3}{r_2}\sin\alpha + M + m_4 g R_3$$

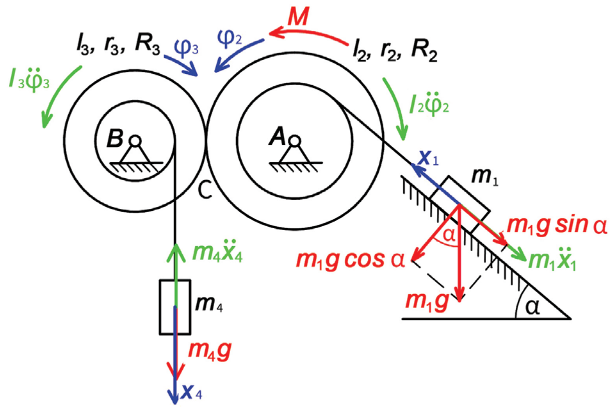
$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{r_2\left(-m_1 g R_2 r_3\sin\alpha + M r_2 + m_4 g r_2 R_3\right)}{m_1 R_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 r_2^2 + m_4 r_2^2 R_3^2}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{-m_1 g R_2 r_3\sin\alpha + M r_2 + m_4 g r_2 R_3}{r_3\left(m_1 R_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 r_2^2 + m_4 r_2^2 R_3^2\right)}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{R_2 r_3 \left(-m_1 g R_2 r_3 \sin\alpha + M r_2 + m_4 g r_2 R_3\right)}{m_1 R_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 r_2^2 + m_4 r_2^2 R_3^2}$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{R_3 r_2 \left(-m_1 g R_2 r_3 \sin\alpha + M r_2 + m_4 g r_2 R_3\right)}{m_1 R_2^2 r_3^2 + I_2 r_3^2 + I_3 r_2^2 + m_4 r_2^2 R_3^2}$$

Zadanie 3.14.



Rys. 3.14a

Równania więzów: $x_1 = R_2\varphi_2$, $R_2\varphi_2 = R_3\varphi_3$, $x_4 = r_3\varphi_3$
φ_3 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = \frac{r_2 R_3}{R_2}\delta\varphi_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{R_3}{R_2}\delta\varphi_3,\ \delta x_4 = r_3\delta\varphi_3$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{r_2 R_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{R_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3,\ \ddot{x}_4 = r_3\ddot{\varphi}_3$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(M - I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\frac{r_2 R_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{r_2 R_3}{R_2}\delta\varphi_3 + \left(M - I_2\frac{R_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3\right)\frac{R_3}{R_2}\delta\varphi_3 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3$$
$$+\left(m_4 g - m_4 r_3\ddot{\varphi}_3\right)r_3\delta\varphi_3 = 0$$

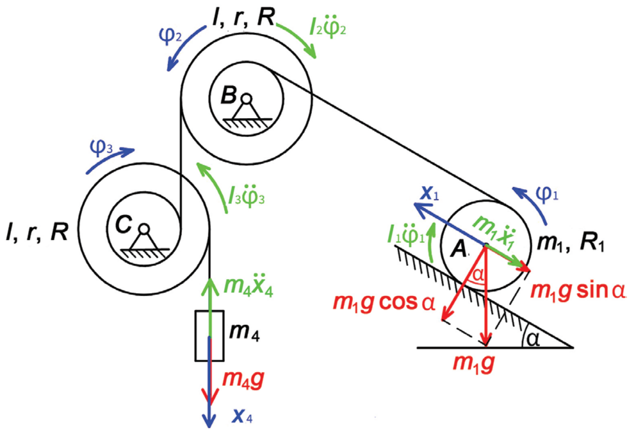
$$\left(m_1\frac{r_2^2 R_3^2}{R_2^2} + \frac{I_2 R_3^2}{R_2^2} + I_3 + m_4 r_3^2\right)\ddot{\varphi}_3 = -m_1 g\frac{r_2 R_3}{R_2}\sin\alpha + M\frac{R_3}{R_2} + m_4 g r_3$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{R_2\left(-m_1 g r_2 R_3 \sin\alpha + M R_3 + m_4 g r_3 R_2\right)}{m_1 r_2^2 R_3^2 + I_2 R_3^2 + I_3 R_2^2 + m_4 r_r^2 R_2^2}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{R_3\left(-m_1 g r_2 R_3 \sin\alpha + M R_3 + m_4 g r_3 R_2\right)}{m_1 r_2^2 R_3^2 + I_2 R_3^2 + I_3 R_2^2 + m_4 r_r^2 R_2^2}$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{R_2 r_3\left(-m_1 g r_2 R_3 \sin\alpha + M R_3 + m_4 g r_3 R_2\right)}{m_1 r_2^2 R_3^2 + I_2 R_3^2 + I_3 R_2^2 + m_4 r_r^2 R_2^2}$$

Zadanie 3.15.



Rys. 3.15a

Równania więzów: $x_1 = R_1\varphi_1$, $r\varphi_2 = 2R_1\varphi_1$, $R\varphi_2 = R\varphi_3$, $x_4 = R\varphi_3$
φ_1 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = R_1\delta\varphi_1,\ \delta\varphi_2 = \frac{2R_1}{r}\delta\varphi_1,\ \delta\varphi_3 = \frac{2R_1 R}{r^2}\delta\varphi_1,\ \delta x_4 = \frac{2R_1 R^2}{r^2}\delta\varphi_1$$

$$\ddot{x}_1 = R_1\ddot{\varphi}_1,\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{2R_1}{r}\ddot{\varphi}_1,\ \ddot{\varphi}_3 = \frac{2R_1 R}{r^2}\ddot{\varphi}_1,\ \ddot{x}_4 = \frac{2R_1 R^2}{r^2}\ddot{\varphi}_1$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-I_1\ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 +$$
$$+\left(m_4 g - m_4\ddot{x}_4\right)\delta x_4 = 0$$

$$\left(-m_1 g\sin\alpha - m_1R_1\ddot{\varphi}_1\right)R_1\delta\varphi_1 + \left(-\frac{m_1R_1^2}{2}\ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 + \left(-I_2\frac{2R_1}{r}\ddot{\varphi}_1\right)\frac{2R_1}{r}\delta\varphi_1 +$$

$$+\left(-I_3\frac{2R_1R}{r^2}\ddot{\varphi}_1\right)\frac{2R_1R}{r^2}\delta\varphi_1 + \left(m_4g - m_4\frac{2R_1R^2}{r^2}\ddot{\varphi}_1\right)\frac{2R_1R^2}{r^2}\delta\varphi_1 = 0$$

$$\left(\frac{3m_1R_1^2}{2} + \frac{4I_2R_1^2}{r^2} + \frac{4I_3R_1^2R^2}{r^4} + \frac{4m_4R_1^2R^4}{r^4}\right)\ddot{\varphi}_1 = -m_1gR_1\sin\alpha + \frac{2m_4gR_1R^2}{r^2}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{r^2\left(-m_1gr^2\sin\alpha + 2m_4gR^2\right)}{R_1\left(1.5m_1r^4 + 4I_2r^2 + 4I_3R^2 + 4m_4R^4\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{2r\left(-m_1gr^2\sin\alpha + 2m_4gR^2\right)}{\left(1.5m_1r^4 + 4I_2r^2 + 4I_3R^2 + 4m_4R^4\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{2R\left(-m_1gr^2\sin\alpha + 2m_4gR^2\right)}{\left(1.5m_1r^4 + 4I_2r^2 + 4I_3R^2 + 4m_4R^4\right)}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{r^2\left(-m_1gr^2\sin\alpha + 2m_4gR^2\right)}{\left(1.5m_1r^4 + 4I_2r^2 + 4I_3R^2 + 4m_4R^4\right)}$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{2R^2\left(-m_1gr^2\sin\alpha + 2m_4gR^2\right)}{\left(1.5m_1r^4 + 4I_2r^2 + 4I_3R^2 + 4m_4R^4\right)}$$

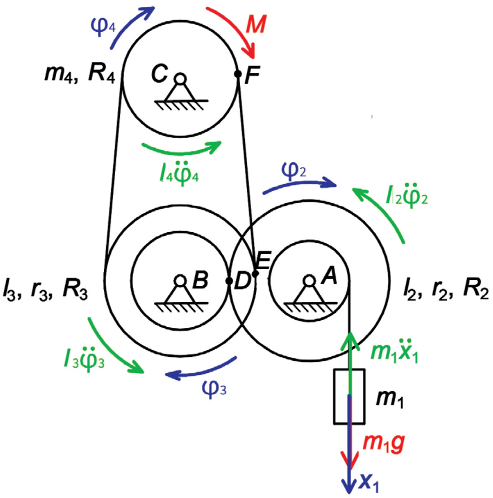
Zadanie 3.16.

Równania więzów: $x_1 = r_2\varphi_2$, $R_2\varphi_2 = r_3\varphi_3$, $R_3\varphi_3 = R_4\varphi_4$

φ_2 – współrzędna uogólniona, jeden stopień swobody

$$\delta x_1 = r_2\delta\varphi_2,\ \delta\varphi_3 = \frac{R_2}{r_3}\delta\varphi_2,\ \delta\varphi_4 = \frac{R_3R_2}{r_3R_4}\delta\varphi_2$$

$$\ddot{x}_1 = r_2\ddot{\varphi}_2,\ \ddot{\varphi}_3 = \frac{R_2}{r_3}\ddot{\varphi}_2,\ \ddot{\varphi}_4 = \frac{R_3R_2}{r_3R_4}\ddot{\varphi}_2$$



Rys. 3.16a

$$\left(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\ddot{\varphi}_3\right)\delta\varphi_3 + \left(M - I_4\ddot{\varphi}_4\right)\delta\varphi_4 = 0$$

$$\left(m_1 g - m_1 r_2\ddot{\varphi}_2\right)r_2\delta\varphi_2 + \left(-I_2\ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(-I_3\frac{R_2}{r_3}\ddot{\varphi}_2\right)\frac{R_2}{r_3}\delta\varphi_2 +$$

$$+\left(M - \frac{m_4 R_4^2}{2}\frac{R_3 R_2}{r_3 R_4}\ddot{\varphi}_2\right)\frac{R_3 R_2}{r_3 R_4}\delta\varphi_2 = 0$$

$$\left(m_1 r_2^2 + I_2 + I_3\frac{R_2^2}{r_3^2} + \frac{m_4 R_2^2 R_3^2}{2r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_2 = \left(m_1 g r_2 + \frac{M R_3 R_2}{r_3 R_4}\right)$$

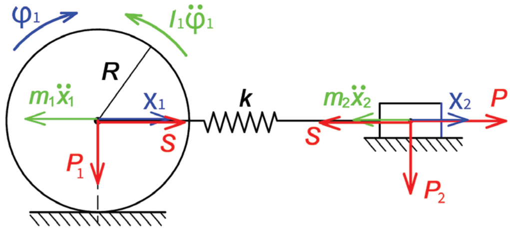
$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{2r_3\left(m_1 g r_2 r_3 R_4 + M R_3 R_2\right)}{R_4\left(2m_1 r_2^2 r_3^2 + 2I_2 r_3^2 + 2I_3 R_2^2 + m_4 R_2^2 R_3^2\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{2R_2\left(m_1 g r_2 r_3 R_4 + M R_3 R_2\right)}{R_4\left(2m_1 r_2^2 r_3^2 + 2I_2 r_3^2 + 2I_3 R_2^2 + m_4 R_2^2 R_3^2\right)}$$

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{2R_2 R_3\left(m_1 g r_2 r_3 R_4 + M R_3 R_2\right)}{R_4^2\left(2m_1 r_2^2 r_3^2 + 2I_2 r_3^2 + 2I_3 R_2^2 + m_4 R_2^2 R_3^2\right)}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{2r_2 r_3\left(m_1 g r_2 r_3 R_4 + M R_3 R_2\right)}{R_4\left(2m_1 r_2^2 r_3^2 + 2I_2 r_3^2 + 2I_3 R_2^2 + m_4 R_2^2 R_3^2\right)}$$

Zadanie 3.17.



Rys. 3.17a

Równania więzów: $x_1 = R\varphi_1$
x_1, x_2 – współrzędne uogólnione, dwa stopnie swobody

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_1}{R}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{R}$$

$$\left(S - \frac{P_1}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-I_1\ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 + \left(P - S - \frac{P_2}{g}\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

$$S = k\left(x_2 - x_1\right)$$

$$I_1 = \frac{P_1 R^2}{2g}$$

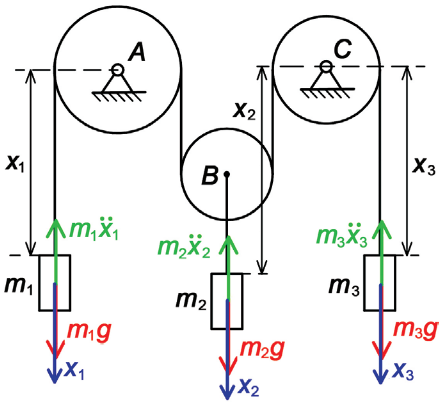
$$\left(S - \frac{P_1}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(-\frac{P_1 R^2}{2g}\frac{\ddot{x}_1}{R}\right)\frac{\delta x_1}{R} + \left(P - S - \frac{P_2}{g}\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

$$\left(S - \frac{P_1}{g}\ddot{x}_1 - \frac{P_1\ddot{x}_1}{2g}\right)\delta x_1 + \left(P - S - \frac{P_2}{g}\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

$$\begin{cases} S - \dfrac{3P_1}{2g}\ddot{x}_1 = 0 \\ P - S - \dfrac{P_2}{g}\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami: $-\dfrac{3P_1}{2g}\ddot{x}_1 + P - \dfrac{P_2}{g}\ddot{x}_2 = 0$

Zadanie 3.18.



Rys. 3.18a

Równanie więzu: $x_1 + 2x_2 + x_3 = \text{const}$

$$x_1 = -2x_2 - x_3$$

x_2, x_3 – współrzędne uogólnione, dwa stopnie swobody

$$\delta x_1 = -2\delta x_2 - \delta x_3$$

$$\ddot{x}_1 = -2\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3$$

$$(m_1 g - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (m_2 g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (m_3 g - m_3\ddot{x}_3)\delta x_3 = 0$$

$$\left(m_1 g - m_1(-2\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3)\right)(-2\delta x_2 - \delta x_3) + (m_2 g - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (m_3 g - m_3\ddot{x}_3)\delta x_3 = 0$$

$$\begin{aligned}&(-2m_1 g - 4m_1\ddot{x}_2 - 2m_1\ddot{x}_3 + m_2 g - m_2\ddot{x}_3)\delta x_2\\ &+(-m_1 g - 2m_1\ddot{x}_2 - m_1\ddot{x}_3 + m_3 g - m_3\ddot{x}_3)\delta x_3 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{cases}(4m_1 + m_2)\ddot{x}_2 + 2m_1\ddot{x}_3 = -2m_1 g + m_2 g\\ 2m_1\ddot{x}_2 + (m_1 + m_3)\ddot{x}_3 = -m_1 g + m_3 g\end{cases}$$

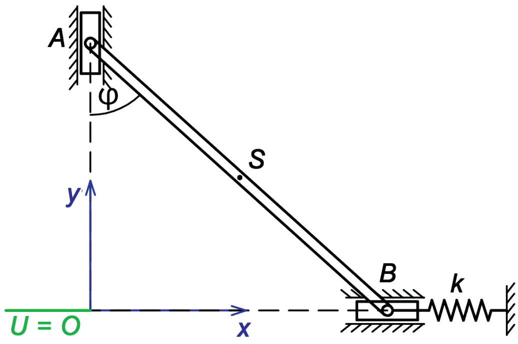
$$\ddot{x}_3 = \frac{4m_1m_3 - 3m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}g$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}g$$

7.3. ODPOWIEDZI DO ROZDZIAŁU IV

Zadanie 4.13.



Rys. 4.13a

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona. Pręt AB (1) – ruch płaski wokół punktu S, suwak A (2) – ruch postępowy, suwak B (3) – ruch postępowy.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Moment bezwładności:

$$I_S = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Współrzędne i prędkość punktu A:

$$x_A = 0 \qquad y_A = 2l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_A = 0 \qquad \dot{y}_A = -2l\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \left(-2l\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

Współrzędne i prędkość punktu B:

$$x_B = 2l\sin\varphi \qquad y_B = 0$$
$$\dot{x}_B = 2l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = 0$$
$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \left(2l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

Współrzędne i prędkość punktu S:

$$x_S = l\sin\varphi \qquad y_S = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_S = l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$
$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \left(l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2 = l^2\dot{\varphi}^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_S\varphi^2 + \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$= \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + 2ml^2\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = mgy_S + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2 = mgl\cos\varphi + 2kl^2\sin^2\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi - 2kl^2 sin^2\varphi$$

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{16}{3}ml^2\dot{\varphi}$$

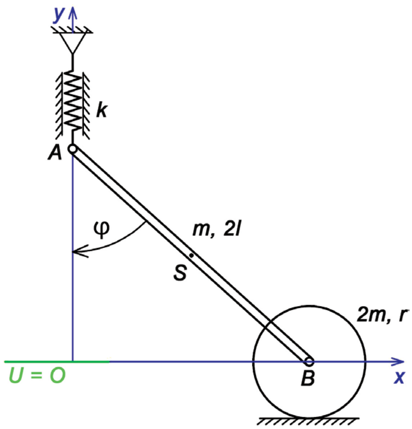
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{16}{3}ml^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = mgl\sin\varphi - 4kl^2\sin\varphi\cos\varphi = mgl\sin\varphi - 2kl^2\sin 2\varphi$$

Równanie ruchu:

$$\frac{16}{3}ml^2\ddot{\varphi} - mgl\sin\varphi + 2kl^2\sin 2\varphi = 0$$

Zadanie 4.14.



Rys. 4.14a

Jeden stopień swobody, – współrzędna uogólniona. Pręt AB (1) – ruch płaski wokół punktu S, walec (2) – ruch płaski wokół punktu B.

$$T_1 = \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2}2mv_B^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Momenty bezwładności:

$$I_S = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}2mr^2 = mr^2$$

Współrzędne punktu A:

$$x_A = 0 \qquad y_A = 2l\cos\varphi$$

Współrzędne i prędkość punktu B:

$$x_B = 2l\sin\varphi \qquad y_B = 0$$
$$\dot{x}_B = 2l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_B = 0$$
$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \left(2l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

Prędkość kątowa walca:

$$\dot{\varphi}_k = \frac{v_B}{r}$$

$$\dot{\varphi}_k^2 = \frac{v_B^2}{r^2}$$

Współrzędne i prędkość punktu S:

$$x_S = l\sin\varphi \qquad y_S = l\cos\varphi$$
$$\dot{x}_S = l\cos\varphi\dot{\varphi} \qquad \dot{y}_S = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$
$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \left(l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(-l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2 = l^2\dot{\varphi}^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_k^2 + mv_B^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}mv_B^2 =$$
$$= \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 6ml^2\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi$$

$$U = mgy_S + \frac{1}{2}k\left(2l\cos\varphi\right)^2 = mgl\cos\varphi + 2kl^2 cos^2\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 6ml^2\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi - mgl\cos\varphi - 2kl^2 cos^2\varphi$$

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi} + 12ml^2 cos^2\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)=\frac{4}{3}ml^2\ddot\varphi+12ml^2\left(-\underbrace{2\cos\varphi\sin\varphi}_{\sin 2\varphi}\dot\varphi^2+cos^2\varphi\ddot\varphi\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{3}ml^2+12ml^2cos^2\varphi\right)\ddot\varphi-12ml^2\sin 2\varphi\dot\varphi^2$$

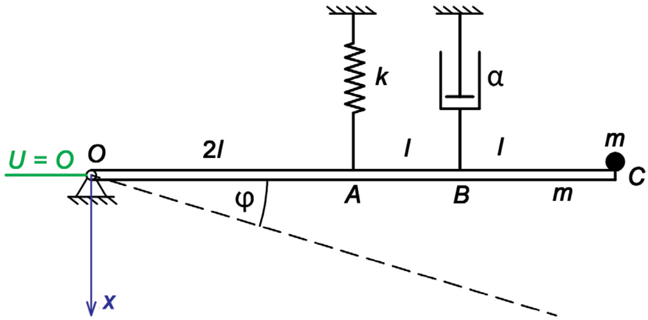
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-\left(12ml^2\dot\varphi^2-2kl^2\right)\underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}+mgl\sin\varphi=$$

$$=-\left(6ml^2\dot\varphi^2-kl^2\right)\sin 2\varphi+mgl\sin\varphi$$

Równanie ruchu:

$$\left(\frac{4}{3}ml^2+12ml^2cos^2\varphi\right)\ddot\varphi-6ml\dot\varphi^2\sin 2\varphi-mg\sin\varphi-kl^2\sin 2\varphi=0$$

Zadanie 4.15.



Rys. 4.15a

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona. Pręt OC (1) – ruch obrotowy wokół punktu O, masa C (2) – ruch postępowy.

$$T_1=\frac{1}{2}I_O\dot\varphi^2$$

$$T_2=\frac{1}{2}mv_C^2$$

$$T=T_1+T_2$$

Momenty bezwładności:

$$I_0 = \frac{1}{3} m (4l)^2 = \frac{16}{3} ml^2$$

Współrzędne punktu A:

$$x_A = 2l \sin \varphi$$

Współrzędne i prędkość punktu B:

$$x_B = 3l \sin \varphi$$

$$\dot{x}_B = 3l \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 = (3l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 = 9l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi$$

Współrzędne punktu C:

$$x_C = 4l \sin \varphi$$

$$\dot{x}_C = 4l \cos \varphi \dot{\varphi}$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{8}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + 8ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi$$

$$U = -mgx_A + \frac{1}{2} kx_C^2 - mgx_C = -2mgl \sin \varphi + \frac{1}{2} k (4l \sin \varphi)^2 - 4mgl \sin \varphi =$$
$$= -6mgl \sin \varphi + 8kl^2 \sin^2 \varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{8}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + 8ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + 6mgl \sin \varphi - 8kl^2 \sin^2 \varphi$$

Funkcja dyssypacji energii:

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_B^2 = \frac{9}{2} \alpha l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi$$

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{16}{3}ml^2\dot{\varphi}+16ml^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{16}{3}ml^2\ddot{\varphi}+16ml^2\left(-2\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}^2+cos^2\varphi\ddot{\varphi}\right)=$$
$$=\left(\frac{16}{3}ml^2+16ml^2cos^2\varphi\right)\ddot{\varphi}-16ml^2\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2$$

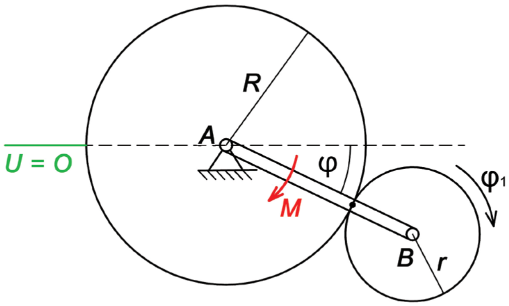
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\left(16ml^2\dot{\varphi}^2-16kl^2\right)\sin\varphi\cos\varphi+mgl\cos\varphi=$$
$$=\left(8ml^2\dot{\varphi}^2-8kl^2\right)\sin 2\varphi+mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}}=9\alpha l^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi$$

Równanie ruchu:

$$\left(\frac{16}{3}ml^2+16ml^2\cos^2\varphi\right)\ddot{\varphi}-24ml^2\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2+9\alpha l^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi+8kl^2\sin 2\varphi$$
$$-mgl\cos\varphi=0$$

Zadanie 4.16.



Rys. 4.16a

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona. Pręt AB (1) – ruch obrotowy wokół punktu A, krążek B (2) – ruch płaski.

$$T_1=\frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_B^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Moment bezwładności:

$$I_A = \frac{1}{3} m_2 \left(R + r\right)^2$$

$$I_B = \frac{1}{2} m_1 r^2$$

W punkcie C mamy chwilowy środek obrotu:

$$v_B = r\dot{\varphi}_1 \qquad v_B = \left(R + r\right)\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\left(R + r\right)\dot{\varphi}}{r}$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_B \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_B^2 = \frac{1}{6} m_2 (R + r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_1 r^2 \frac{(R + r)^2}{r^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2$$
$$= \left(\frac{1}{6} m_2 (R + r)^2 + \frac{1}{4} m_1 (R + r)^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \right) \varphi^2$$

$$U = -m_1 g \left(\frac{R + r}{2} \right) \sin\varphi - m_2 g \left(R + r\right) \sin\varphi$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \left(\left(\frac{1}{6} m_2 + \frac{1}{4} m_1 \right) \left(R + r\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2} m_1 g + m_2 g \right) \left(R + r\right) \sin\varphi$$

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{1}{3} m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right) \left(R + r\right)^2 + m_1 r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\left(\frac{1}{3}m_2+\frac{1}{2}m_1\right)(R+r)^2+m_1r^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\left(\frac{1}{2}m_1g+m_2g\right)(R+r)\cos\varphi$$

Siła uogólniona:

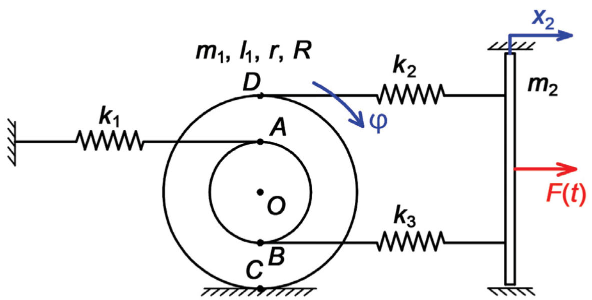
$$\delta L = M\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = M$$

Równanie ruchu:

$$\left(\frac{1}{3}m_2+\frac{1}{2}m_1\right)(R+r)^2+m_1r^2\ddot{\varphi}-\left(\frac{1}{2}m_1g+m_2g\right)(R+r)\cos\varphi=M$$

Zadanie 4.17.



Rys. 4.17a

Dwa stopnie swobody, φ, x_2 – współrzędne uogólnione. Walec (1) – ruch płaski, pręt (2) – ruch postępowy.

$$T_1=\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_1v_0^2$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

W punkcie C mamy chwilowy środek obrotu:

$$x_A = (R + r)\varphi$$

$$x_C = (R - r)\varphi$$

$$x_D = 2R\varphi$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1v_0^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1R^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(R + r\right)^2\varphi^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - 2R\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1R^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\left(R + r\right)^2\varphi^2 - \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - 2R\varphi\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right)^2$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = Q_{x_2}$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_1 + m_1R^2\right)\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(I_1 + m_1R^2\right)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -k_1\left(R + r\right)^2\varphi + 2Rk_2\left(x_2 - 2R\varphi\right) - 2\left(R - r\right)k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2\left(x_2 - 2R\varphi\right) - k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right)$$

Siła uogólniona:

$$\delta L = F\left(t\right)\delta x_2$$

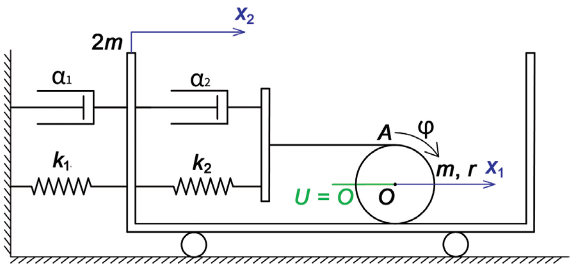
$$Q_{x_2} = F\left(t\right)$$

Równanie ruchu:

$$\left(I_1 + m_1 R^2\right)\ddot{\varphi} + k_1\left(R + r\right)^2 \varphi - 2Rk_2\left(x_2 - 2R\varphi\right) + 2\left(R - r\right)k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - 2R\varphi\right) + k_3\left(x_2 + \left(R - r\right)\varphi\right) = F\left(t\right)$$

Zadanie 4.18.



Rys. 4.18a

Dwa stopnie swobody, x_1, x_2 – współrzędne uogólnione. Walec (1) – ruch płaski, wózek (2) – ruch postępowy.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 2m \dot{x}_2^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

W punkcie styku walca z wózkiem mamy chwilowy środek obrotu:

$$r\dot{\varphi} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{r}$$

Moment bezwładności dla walca: $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$
Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + m\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 + m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_2^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 + m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_2^2 - \frac{1}{2}k_2\left(x_1 - x_2\right)^2$$

Funkcja dyssypacji energii:

$$D = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = Q_{x_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = Q_{x_2}$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_2\left(x_1 - x_2\right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + 2m\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = -\frac{1}{2}m\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right) + 2m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k_2\left(x_1 - x_2\right) - k_1 x_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = \alpha_1\dot{x}_2 - \alpha_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)$$

Siła uogólniona:

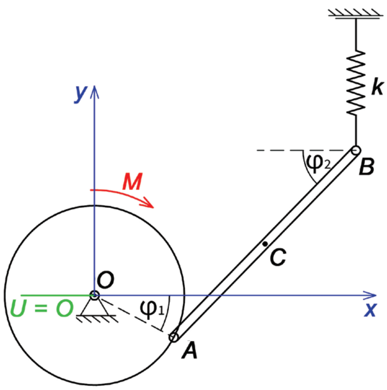
$$Q_{x_1} = Q_{x_2} = 0$$

Równanie ruchu:

$$m\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right) + k_2\left(x_1 - x_2\right) + \alpha_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}m\left(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2\right) + 2m\ddot{x}_2 - k_2\left(x_1 - x_2\right) + k_1 x_2 = \alpha_1\dot{x}_2 - \alpha_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 0$$

Zadanie 4.19.



Rys. 4.19a

Dwa stopnie swobody, φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione. Krążek (1) – ruch obrotowy wokół punktu O, pręt AB (2) – ruch płaski.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} 2m v_C^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Momenty bezwładności:

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} 2m \left(2l\right)^2 = \frac{2}{3} m l^2$$

Współrzędne punktu C i jego prędkość:

$$x_C = r\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2 \qquad y_C = -r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$$
$$\dot{x}_C = -r\sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - l\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_2 \qquad \dot{y}_C = -r\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 + l\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_2$$

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \left(-r\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 - l\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(-r\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 + l\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_2\right)^2 =$$
$$= r^2\dot{\varphi}_1^2 - 2rl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + l^2\dot{\varphi}_2^2$$

Współrzędne punktu B:

$$y_B = 2l\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_1$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} 2m v_C^2 = \frac{5}{4} m r^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 - 2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$$

$$U = 2mgy_C + \frac{1}{2} k y_B^2 = 2mg\left(-r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2\right) + \frac{1}{2} k\left(2l\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_1\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{5}{4} m r^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 - 2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) - 2mg\left(-r\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2\right)$$
$$-\frac{1}{2} k\left(2l\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_1\right)^2$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=Q_{\varphi_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=Q_{\varphi_2}$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}=\frac{5}{2}mr^2\dot{\varphi}_1-2mrl\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=\frac{5}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1-2mrl\left(\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+2mgr\cos\varphi_1+k\left(2l\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1\right)r\cos\varphi_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}_2-2mrl\dot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=\frac{8}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2-2mrl\left(\ddot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\dot{\varphi}_1\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-2mgl\cos\varphi_2-k\left(2l\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1\right)2l\cos\varphi_2$$

Siła uogólniona:

$$\delta L=M\delta\varphi_1$$

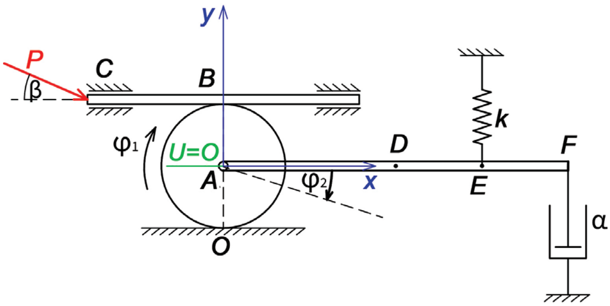
$$Q_{\varphi_1}=M$$

Równanie ruchu:

$$\frac{5}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1-2mrl\left(\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)$$
$$-2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-2mgr\cos\varphi_1-k\left(2l\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1\right)r\cos\varphi_1=M$$

$$\frac{8}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2-2mrl\left(\ddot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)-\dot{\varphi}_1\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2\right)\right)$$
$$-2mrl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+2mgl\cos\varphi_2+k\left(2l\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1\right)2l\cos\varphi_2=0$$

Zadanie 4.20.



Rys. 4.20a

Dwa stopnie swobody, φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione. Walec (1) – ruch płaski pręt AF (2) – ruch płaski, pręt B (3) – ruch postępowy.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} 2mv_A^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_D \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} mv_D^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} mv_B^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Momenty bezwładności:

$$I_A = \frac{1}{2} 2mr^2 = mr^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m(2r)^2 = \frac{1}{3} mr^2$$

Prędkość punktu A, B i C (w punkcie O chwilowy środek obrotu):

$$v_A = r\dot{\varphi}_1$$

$$v_B = v_C = 2r\dot{\varphi}_1$$

Współrzędne punktu D i jego prędkość:

$$x_D = r\varphi_1 + 2r\cos\varphi_2 \qquad y_D = -2r\sin\varphi_2$$
$$\dot{x}_D = r\dot{\varphi}_1 - 2r\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2 \qquad \dot{y}_D = -2r\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2$$

$$v_D^2 = \dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2 = \left(r\dot{\varphi}_1 - 2r\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(-2r\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2$$
$$= r^2\dot{\varphi}_1^2 - 4r^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 4r^2\dot{\varphi}_2^2$$

Współrzędne punktu E:

$$x_E = r\varphi_1 + 3r\cos\varphi_2 \qquad y_E = -3r\sin\varphi_2$$

Współrzędne punktu F i jego prędkość:

$$x_F = r\varphi_1 + 4r\cos\varphi_2 \qquad y_E = -4r\sin\varphi_2$$
$$\dot{x}_F = r\dot{\varphi}_1 - 4r\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2 \qquad \dot{y}_E = -4r\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2$$

$$v_F^2 = \dot{x}_F^2 + \dot{y}_F^2 = \left(r\dot{\varphi}_1 - 4r\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(-4r\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2 =$$
$$= r^2\dot{\varphi}_1^2 - 8r^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 16r^2\dot{\varphi}_2^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}_1^2 + mv_A^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$
$$+\frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}_1^2 - 4r^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 4r^2\dot{\varphi}_2^2\right) + 2mr^2\dot{\varphi}_1^2$$
$$= 4mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{13}{6}mr^2\dot{\varphi}_2^2 - 2mr^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2$$

$$U = -mg2r\sin\varphi_2 + mgr + \frac{1}{2}k\left(3r\sin\varphi_2\right)^2$$

Potencjał kinetyczny jest równy:

$$L = T - U = 4mr^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{13}{6}mr^2\dot{\varphi}_2^2 - 2mr^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + mg2r\sin\varphi_2 - mgr$$
$$-\frac{1}{2}k\left(3r\sin\varphi_2\right)^2$$

Funkcja dyssypacji energii:

$$D = \frac{1}{2}\alpha v_F^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(r^2\dot{\varphi}_1^2 - 8r^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + 16r^2\dot{\varphi}_2^2\right)$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}_1} = Q_{\varphi_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2}=Q_{\varphi_2}$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}=8mr^2\dot{\varphi}_1-2mr^2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=8mr^2\ddot{\varphi}_1-2mr^2\left(\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1}=\alpha r^2\left(\dot{\varphi}_1-4\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{13}{3}mr^2\dot{\varphi}_2-2mr^2\dot{\varphi}_1\sin\varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=\frac{8}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2-2mr^2\left(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=-2mr^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2+2mgr\cos\varphi_2-\frac{9}{2}kr^2\sin 2\varphi_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2}=-4\alpha r^2\left(\dot{\varphi}_1\sin\varphi_2-4\dot{\varphi}_2\right)$$

Siły uogólnione:

$$\delta L=-2Pr\cos\beta\delta\varphi_1$$

$$Q_{\varphi_1}=-2Pr\cos\beta$$

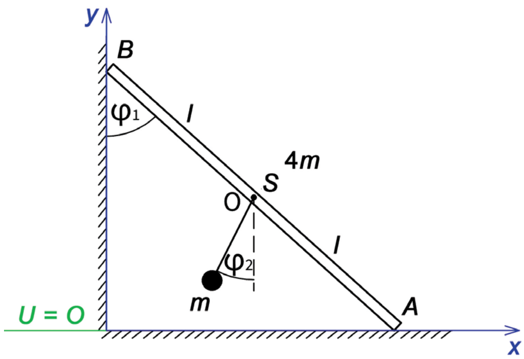
$$Q_{\varphi_2}=0$$

Równania ruchu:

$$8mr^2\ddot{\varphi}_1-2mr^2\left(\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2\right)+\alpha r^2\left(\dot{\varphi}_1-4\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\right)=-2Pr\cos\beta$$

$$\frac{8}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2-2mr^2\left(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_2-\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_2\right)+2mr^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2-2mgr\cos\varphi_2$$
$$+\frac{9}{2}kr^2\sin 2\varphi_2-4\alpha r^2\left(\dot{\varphi}_1\sin\varphi_2-4\dot{\varphi}_2\right)=0$$

Zadanie 4.21.



Rys. 4.21a

Dwa stopnie swobody, φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione. Pręt (1) – ruch płaski, masa (2) – ruch postępowy.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} 4m v_S^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_O^2$$

$$T = T_1 + T_2$$

Momenty bezwładności:

$$I_S = \frac{1}{12} 4m(2l)^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

Współrzędne punktu S i jego prędkość:

$$x_S = l \sin\varphi_1 \qquad y_S = r \cos\varphi_1$$
$$\dot{x}_S = l \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 \qquad \dot{y}_S = -l \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1$$

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \left(l \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1\right)^2 + \left(-l \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1\right)^2 = l^2 \dot{\varphi}_1^2$$

Współrzędne punktu O i jego prędkość:

$$x_O = l \sin\varphi_1 + \frac{l}{2} \sin\varphi_2 \qquad y_O = l \cos\varphi_1 - \frac{l}{2} \cos\varphi_2$$

$$\dot{x}_O = l \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l \cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2 \qquad \dot{y}_O = -l \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2} \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2$$

$$v_O^2 = \dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2 = \left(l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 - l\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(-l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2\right)^2 =$$

$$= l^2\dot{\varphi}_1^2 - l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_2^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}4mv_S^2 + \frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{19}{6}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{8}ml^2\dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$U = 4mgl\cos\varphi_1 + mg\frac{l}{2}\cos\varphi_2$$

Potencjał kinematyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{19}{6}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{8}ml^2\dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - 4mgl\cos\varphi_1 - mg\frac{l}{2}\cos\varphi_2$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_2} = 0$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = \frac{19}{3}ml^2\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \frac{19}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}ml^2\left(\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \frac{19}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}ml^2\left(\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = -\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + 4mgl\sin\varphi_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} = \frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}\right)=\frac{1}{4}ml^2\ddot{\varphi}_2-\frac{1}{2}ml^2\left(\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right)$$

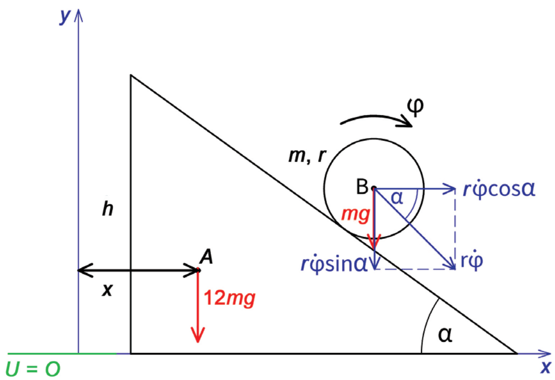
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_2}=-\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+mg\frac{l}{2}\sin\varphi_2$$

Równanie ruchu:

$$\frac{19}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1-\frac{1}{2}ml^2\left(\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)-4mgl\sin\varphi_1=0$$

$$\frac{1}{4}ml^2\ddot{\varphi}_2-\frac{1}{2}ml^2\left(\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)-mg\frac{l}{2}\sin\varphi_2=0$$

Zadanie 4.22.



Rys. 4.22a

Dwa stopnie swobody, φ, x – współrzędne uogólnione. Walec (1) – ruch płaski, klin (2) – ruch postępowy.

$$T_1=\frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$T_2=\frac{1}{2}12m\dot{x}^2$$

$$T=T_1+T_2$$

Moment bezwładności walca:

$$I_B = \frac{1}{2} m r^2$$

Prędkość środka walca (punktu B) jest wypadkową dwóch prędkości $\dot{x}$ i $r\dot{\varphi}$, które zostały przedstawione na rys. 4.22a.

$$\dot{x}_B = \dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\alpha \qquad \dot{y}_B = -r\dot{\varphi}\sin\alpha$$

$$v_B^2 = \left(\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\alpha\right)^2 + \left(-r\dot{\varphi}\sin\alpha\right)^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + 2r^2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\alpha$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2} I_B \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 + 6m\dot{x}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{13}{2} m\dot{x}^2 + m r^2 \dot{x}\dot{\varphi}\cos\alpha$$

Zakładamy, że środek ciężkości klina znajduje się w jednej trzeciej jego wysokości.

$$U = 12mg\frac{h}{3} + mg\left(h - r\varphi\sin\alpha\right) = 5mgh - mgr\varphi\sin\alpha$$

Potencjał kinematyczny jest równy:

$$L = T - U = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{13}{2} m\dot{x}^2 + m r^2 \dot{x}\dot{\varphi}\cos\alpha - 5mgh + mgr\varphi\sin\alpha$$

Równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Policzymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\varphi} + m r^2 \dot{x}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi} + m r^2 \ddot{x}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mgr\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 13m\dot{x} + mr^2\dot{\varphi}\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 13m\ddot{x} + mr^2\ddot{\varphi}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Równanie ruchu:

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\varphi} + mr^2\ddot{x}\cos\alpha - mgr\sin\alpha = 0$$

$$13m\ddot{x} + mr^2\ddot{\varphi}\cos\alpha = 0$$

7.4. ODPOWIEDZI DO ROZDZIAŁU V

Zadanie 5.11.

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi wzdłuż podłoża.

$$h_1 = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + \frac{h}{2}\cos\varphi$$

$$U = mgh_1 = mg\left(R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + \frac{h}{2}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mg\left(-R\sin\varphi + R\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right) = mg\left(R\varphi\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \iff mg\left(R\varphi\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi\right) = 0$$

$$R\varphi\cos\varphi - \frac{h}{2}\sin\varphi = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mg\left(R\cos\varphi - R\varphi\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0} = mg\left(R - \frac{h}{2}\right)$$

Aby położenie było trwałym położeniem równowagi, to $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0} > 0$, a zatem $mg\left(R - \frac{h}{2}\right) > 0$, czyli $R > \frac{h}{2}$.

Zadanie 5.12.

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi przez punkt O.

$$U = mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l - 2l\cos\varphi\right)^2 = mgl\cos\varphi + 2kl^2\left(1-\cos\varphi\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi + 4kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

$$\sin\varphi\left(-mgl + 4kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\right) = 0$$

$$\sin\varphi = 0 \qquad \text{lub} \qquad -mgl + 4kl^2 - 4kl^2\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{-mg + 4kl}{4kl} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{lub} \quad \varphi_2 = \pi$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{4} \quad \text{lub} \quad \varphi_2 = \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \cos\varphi\left(-mgl + 4kl^2 - 4kl^2\cos\varphi\right) + \sin\varphi\left(4kl^2\sin\varphi\right) =$$

$$= \left(-mgl + 4kl^2\right)\cos\varphi - 4kl^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= \left(-mgl + 4kl^2\right)\cos\varphi - 4kl^2\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = -mgl + 4kl^2 - 4kl^2 = -mgl < 0 \text{ niestabilne położenie równowagi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\pi} = mgl - 4kl^2 - 4kl^2 = mgl - 8kl^2 = mgl - 8\cdot\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{4l}l^2$$
$$= -3mgl - 2\sqrt{2}mgl < 0$$

niestabilne położenie równowagi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_3=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}mgl + 2\sqrt{2}kl^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}mgl + 2\sqrt{2}\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{4l}l^2$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}mgl + mgl > 0$$

stabilne położenie równowagi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_4=\frac{7\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}mgl + 2\sqrt{2}kl^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}mgl + 2\sqrt{2}\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{4l}l^2$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}mgl + mgl > 0$$

stabilne położenie równowagi.

Zadanie 5.13.

Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi przez punkt O.

$$U = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + mg\frac{3l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(\frac{2l}{3} - \frac{2l}{3}\cos\varphi\right)^2 =$$
$$= 2mgl\cos\varphi + \frac{2}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -2mgl\sin\varphi + \frac{4}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\left(\sin\varphi\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, zatem:

$$-\sin\varphi\left(2mgl - \frac{4}{9}kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\right) = 0$$

$$-\sin\varphi\left(2mgl-\frac{4}{9}kl^2+\frac{4}{9}kl^2\cos\varphi\right)=0$$

$$\sin\varphi=0 \qquad \text{lub} \qquad 2mgl-\frac{4}{9}kl^2+\frac{4}{9}kl^2\cos\varphi=0$$

$$\cos\varphi=\frac{-mg+\frac{2}{9}kl}{\frac{2}{9}kl}$$

Pierwsze równanie sin φ = 0 dla $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ma jedno rozwiązanie:

$$\varphi_1=0$$

W drugim równaniu, podstawiając za $k=\frac{9\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{2l}$, otrzymujemy $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ cosinus dla $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, zatem:

$$\varphi_2=\frac{\pi}{4}$$

Sprawdźmy teraz stabilność przez policzenie drugiej pochodnej dla kątów φ_1, φ_2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=-\cos\varphi\left(2mgl-\frac{4}{9}kl^2+\frac{4}{9}kl^2\cos\varphi\right)-\sin\varphi\left(-\frac{4}{9}kl^2\sin\varphi\right)=$$
$$=\left(2mgl+\frac{4}{9}kl^2\right)\cos\varphi-\frac{4}{9}kl^2\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0}=-2mgl<0$$

Dla $\varphi_1 = 0$ niestabilne położenie równowagi.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{\pi}{4}}\left(-2mgl+\frac{4}{9}kl^2\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}mgl+\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{9\left(2+\sqrt{2}\right)mg}{2l}l^2=\left(2+\sqrt{2}\right)mg>0$$

Dla $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$ stabilne położenie równowagi.

Zadanie 5.14.
Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi przez punkt B.

$$U = mg2r\cos\varphi + \frac{1}{2}k_1\left(2r\sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(r\sin\varphi\right)^2 =$$
$$= 2mgr\cos\varphi + r^2\left(2k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\left(\sin\varphi\right)^2$$

Zakładamy małe drgania: $\varphi \approx \varphi,\ \cos\varphi \approx\sim 1 - \frac{1}{1}\varphi^2$.

$$U = 2mgr\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) + r^2\left(2k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\varphi^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -2mgr\varphi + r^2\left(4k_1 + k_2\right)\varphi$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$, zatem:

$$-2mgr\varphi + r^2\left(4k_1 + k_2\right)\varphi = 0$$

$$\varphi = 0$$

Stabilność:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = -2mgr + r^2\left(4k_1 + k_2\right)$$

Dla φ = 0 stabilne położenie równowagi, gdy $\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} > 0$, stąd:

$$-2mgr + r^2\left(4k_1 + k_2\right) > 0$$

$$4k_1 + k_2 > \frac{2mg}{r}$$

Zadanie 5.15.
Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi przez punkt A.

$$U = mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2 = mgl\cos\varphi + 2kl^2\left(\sin\varphi\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi + 4kl^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0$$

$$\sin\varphi\left(-mgl+4kl^2\cos\varphi\right)=0$$

$$\sin\varphi=0 \quad \text{lub} \quad -mgl+4kl^2\cos\varphi=0$$

$$\cos\varphi=\frac{mg}{4kl}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_1=0$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_2=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=\cos\varphi\left(-mgl+4kl^2\cos\varphi\right)+\sin\varphi\left(-4kl^2\sin\varphi\right)=$$
$$=-mgl\cos\varphi+4kl^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)=-mgl\cos\varphi+4kl^2\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0}=-mgl+4kl^2=mgl>0 \text{ stabilne położenie równowagi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}mgl-2kl^2<0 \text{ niestabilne położenie równowagi}$$

Zadanie 5.16.
Jeden stopień swobody, φ – współrzędna uogólniona, linia zerowego potencjału przechodzi przez punkt O.

$$U=mgl\cos\varphi+2mgl\cos\varphi+\frac{1}{2}k\left(2l-2l\cos\varphi\right)^2=3mgl\cos\varphi+2kl^2\left(1-\cos\varphi\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-3mgl\sin\varphi+4kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0$$

$$\sin\varphi\left(-3mgl+4kl^2\left(1-\cos\varphi\right)\right)=0$$

$$\sin\varphi = 0 \qquad \text{lub} \qquad -3mgl + 4kl^2 - 4kl^2\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{-3mg + 4kl}{4kl} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_1 = 0 \;\text{ lub }\; \varphi_2 = \pi$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Leftrightarrow\; \varphi_3 = \frac{\pi}{6} \;\text{ lub }\; \varphi_2 = \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = \cos\varphi\left(-3mgl + 4kl^2 - 4kl^2\cos\varphi\right) + \sin\varphi\left(4kl^2\sin\varphi\right) =$$
$$= \left(-3mgl + 4kl^2\right)\cos\varphi - 4kl^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) =$$
$$= \left(-3mgl + 4kl^2\right)\cos\varphi - 4kl^2\cos 2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = -3mgl + 4kl^2 - 4kl^2 = -3mgl < 0 \text{ niestabilne położenie równowagi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_2=\pi} = 3mgl - 4kl^2 - 4kl^2 = mgl - 8kl^2 = 3mgl - 8\cdot\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)mg}{2l}l^2 =$$
$$= -21mgl - 12\sqrt{3}mgl < 0 \text{ niestabilne położenie równowagi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_3=\frac{\pi}{6}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}mgl + \left(2\sqrt{3}-2\right)kl^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}mgl + \left(2\sqrt{3}-2\right)\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)mg}{2l}l^2 =$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\right)mgl > 0 \text{ stabilne położenie równowagi}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_4=\frac{11\pi}{6}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}mgl + \left(2\sqrt{3}+2\right)kl^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}mgl + \left(2\sqrt{3}+2\right)\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)mg}{2l}l^2$$
$$= \left(\frac{15\sqrt{3}}{2} + 15\right)mgl > 0 \text{ stabilne położenie równowagi}$$

Zadanie 5.17.

Dwa stopnie swobody, φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione, linia zerowego potencjału przechodząca przez punkty A i E.

$$U = \frac{3}{2}mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(l\sin\varphi_2 - l\sin\varphi_1\right)^2$$

Zakładamy małe drgania:

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$

$$\cos\varphi_1 \approx 1-\frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2 \approx 1-\frac{1}{2}\varphi_2^2$$

$$U=\frac{3}{2}mgl\left(1-\frac{1}{2}\varphi_1^2\right)+mgl\left(1-\frac{1}{2}\varphi_2^2\right)+\frac{1}{2}k_1\left(2l\varphi_1\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(l\varphi_2-l\varphi_1\right)^2$$

$$U=\frac{5}{2}mgl+\left(2k_1l^2-\frac{3}{4}mgl\right)\varphi_1^2-\frac{1}{2}mgl\varphi_2^2+\frac{1}{2}k_2l^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_1}=\left(4k_1l^2-\frac{3}{2}mgl\right)\varphi_1-k_2l^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}=-mgl\varphi_2+k_2l^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial\varphi_1}=0$ i $\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}=0$:

$$\begin{cases}\left(4k_1l^2-\frac{3}{2}mgl\right)\varphi_1-k_2l^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=0\\ -mgl\varphi_2+k_2l^2\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=0\end{cases}$$

$$\varphi_1=\varphi_2=0$$

Stabilność:

$$\frac{\partial^2U}{\partial\varphi_1^2}=4k_1l^2-\frac{3}{2}mgl+k_2l^2$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial\varphi_2^2}=-mgl+k_2l^2$$

$$\frac{\partial^2U}{\partial\varphi_1\varphi_2}=\frac{\partial^2U}{\partial\varphi_2\varphi_1}=-k_2l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} > 0$$

$$4k_1 l^2 - \frac{3}{2}mgl + k_2 l^2 > 0 \qquad -mgl + k_2 l^2 > 0$$

$$4k_1 + k_2 > \frac{3mg}{3l} \qquad k_2 > \frac{mg}{l}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(4k_1 l^2 - \frac{3}{2}mgl + k_2 l^2\right)\left(-mgl + k_2 l^2\right) - \left(-k_2 l^2\right)^2 > 0$$

Zadanie 5.18.
Dwa stopnie swobody, φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione, linia zerowego potencjału przechodząca przez punkt E.

$$U = mg\left(6l - \frac{3}{2}l\cos\varphi_1\right) + \frac{3}{2}mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k_2\left(3l\sin\varphi_1 - 3l\sin\varphi_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(3l\sin\varphi_2\right)^2$$

Zakładamy małe drgania:

$$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1 \qquad \sin\varphi_2 \approx \varphi_2$$
$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 \qquad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2$$

$$U = mgl\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\varphi_1^2\right) + \frac{3}{2}mgl\left(1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2\right) + \frac{1}{2}k_1\left(2l\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(3l\varphi_2 - 3l\varphi_1\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k_3\left(3l\varphi_2\right)^2$$

$$U = 6mgl + \left(2k_1 l^2 + \frac{1}{2}mgl\right)\varphi_1^2 + \left(\frac{9}{2}k_3 l^2 - \frac{3}{4}mgl\right)\varphi_2^2 + \frac{9}{2}k_2 l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = \left(4k_1 l^2 + 3mgl\right)\varphi_1 - 9k_2 l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = \left(9k_3 l^2 - \frac{3}{2}mgl\right)\varphi_2 + 9k_2 l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

W położeniu równowagi $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0$ i $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0$:

$$\begin{cases} \left(4k_1 l^2 + 3mgl\right)\varphi_1 - 9k_2 l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \\ \left(9k_3 l^2 - \frac{3}{2}mgl\right)\varphi_2 + 9k_2 l^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Stabilność:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = 4k_1 l^2 + 3mgl + 9k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = 9k_3 l^2 - \frac{3}{2}mgl + 9k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \varphi_1} = -9k_2 l^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} > 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} > 0$$

$$4k_1 l^2 + 3mgl + 9k_2 l^2 > 0 \qquad 9k_3 l^2 - \frac{3}{2}mgl + 9k_2 l^2 > 0$$

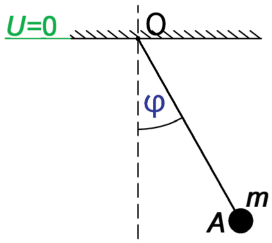
$$4k_1 + 9k_2 > -\frac{3mg}{l} \qquad\qquad k_2 + k_3 > \frac{mg}{6l}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \varphi_2}\right)^2 > 0$$

$$\left(4k_1 l^2 + 3mgl + 9k_2 l^2\right)\left(9k_3 l^2 - \frac{3}{2}mgl + 9k_2 l^2\right) - \left(-9k_2 l^2\right)^2 > 0$$

7.5. ODPOWIEDZI DO ROZDZIAŁU VI

Zadanie 6.11.



Rys. 6.11a

φ – współrzędna uogólniona (jeden stopień swobody)

$$v_A = l\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = -mg\frac{l}{2}\cos\varphi$$

Funkcja Lagrange'a: $L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\varphi$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}$$

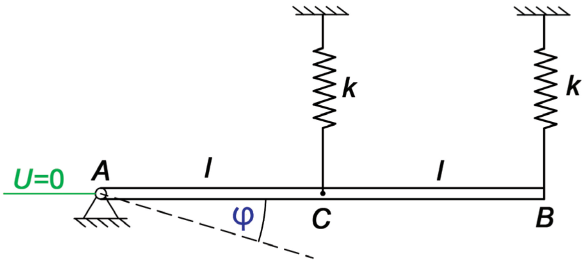
Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi}p - L = \frac{p^2}{2ml^2} - \frac{1}{2}mgl\cos\varphi$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{ml^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{2}mgl\sin\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.12.



Rys. 6.12a

φ – współrzędna uogólniona (jeden stopień swobody)

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = -2mgl\sin\varphi + \frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(2l\sin\varphi\right)^2$$

Funkcja Lagrange'a: $L = T - U = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 + 2mgl\sin\varphi - \frac{5}{2}kl^2\sin^2\varphi$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{8}{3} m l^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{3p}{8ml^2}$$

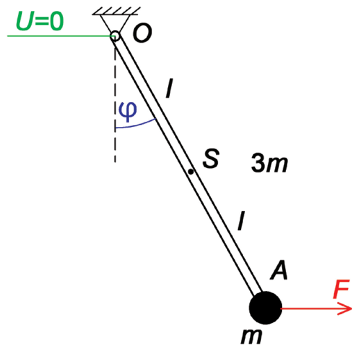
Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi} p - L = \frac{3p^2}{16ml^2} - 2mgl\sin\varphi + \frac{5}{2}kl^2\sin^2\varphi$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{3p}{8ml^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -2mgl\cos\varphi - 5kl^2\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.13.



Rys. 6.13a

φ – współrzędna uogólniona (jeden stopień swobody)

$$v_A = 2l\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 = 4ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = -3mgl\cos\varphi - mg2l\cos\varphi + U(\varphi) = -5mgl\cos\varphi + U(\varphi)$$

Funkcja Lagrange'a: $L = T - U = 4ml^2\dot{\varphi}^2 + 5mgl\cos\varphi - U(\varphi)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 8ml^2\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{8ml^2}$$

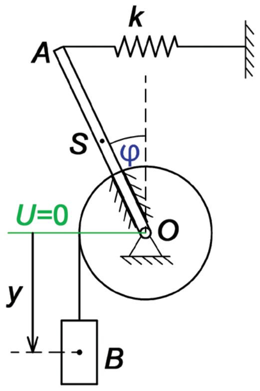
Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi}p - L = \frac{p^2}{16ml^2} - 5mgl\cos\varphi + U(\varphi)$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{8ml^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -5mgl\sin\varphi - \dfrac{dU(\varphi)}{d\varphi} \end{cases}$$

Zadanie 6.14.



Rys. 6.14a

φ – współrzędna uogólniona (jeden stopień swobody)

$$v_B = r\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2} I_{Ok}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{Op}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{15}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = -mgy + \frac{1}{2} k \left(3r\sin\varphi\right)^2 + 2mg\frac{3}{2} r\cos\varphi$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = \frac{15}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgy - \frac{1}{2} k \left(3r\sin\varphi\right)^2 - 3mgr\cos\varphi$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{15}{2} m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2p}{15mr^2}$$

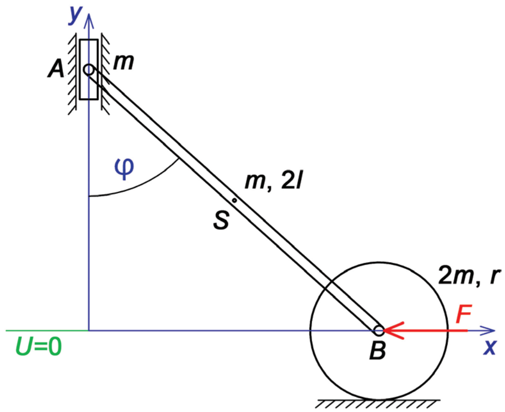
Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi} p - L = \frac{p^2}{15mr^2} - mgy + \frac{1}{2} k \left(3r\sin\varphi\right)^2 + 3mgr\cos\varphi$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{2p}{15mr^2} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -3kr\sin\varphi\cos\varphi + 3mgr\sin\varphi \end{cases}$$

Zadanie 6.15



Rys. 6.15a

φ – współrzędna uogólniona (jeden stopień swobody)

$$v_S = l\dot{\varphi}$$

$$v_A = 2l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$v_B = 2l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\varphi_k = \frac{v_B}{r} = \frac{2l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}}{r}$$

$$T = \frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2}2mv_B^2 = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 4ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$U = 3mgl\cos\varphi + U(\varphi)$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = \frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 + 4ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 3mgl\cos\varphi - U(\varphi)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{16}{3} ml^2 \dot{\varphi} + 8ml^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{3p}{8ml^2 \left(2 + 3\cos^2 \varphi\right)}$$

Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi} p - L = \frac{3p^2}{16ml^2 \left(2 + 3\cos^2 \varphi\right)} + 3mgl \cos \varphi + U\left(\varphi\right)$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{3p}{8ml^2 \left(2 + 3\cos^2 \varphi\right)} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{9p^2}{16ml^2 \left(2 + 3\cos^2 \varphi\right)^2} + 3mgl \sin \varphi - \dfrac{dU\left(\varphi\right)}{d\varphi} \end{cases}$$

Zadanie 6.16.
x_1, x_2 – współrzędne uogólnione (dwa stopnie swobody)

$$v_1 = \dot{x}_1$$

$$v_2 = \dot{x}_2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = U\left(x_2\right)$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - U\left(x_2\right)$$

$$p_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$p_{x_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_1 = \frac{p_{x_1}}{m_1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{p_{x_2}}{m_2}$$

Funkcja Hamiltona:

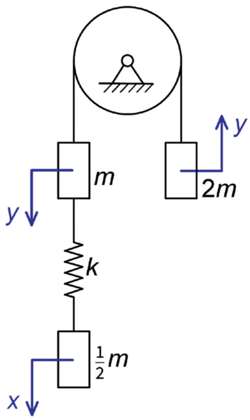
$$H = x_1 p_{x_1} + \dot{x}_2 p_{x_2} - L$$

$$H = \frac{p_{x_1}^2}{2m_1} + \frac{p_{x_2}^2}{2m_2} + U(x_2)$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{x_1}} = \dfrac{p_{x_1}}{m_1} \\ \dot{p}_{x_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{x_2}} = \dfrac{p_{x_2}}{m_2} \\ \dot{p}_{x_2} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\dfrac{dU(x_2)}{dx_2} \end{cases}$$

Zadanie 6.17.



Rys. 6.17a

x, y – współrzędne uogólnione (dwa stopnie swobody)

$$v_A = \dot{x}$$

$$v_B = v_C = \dot{y}$$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mv_C^2 = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}m\dot{y}^2$$

$$U = \frac{1}{2}mgx + mgy - 2mgy + \frac{1}{2}k\left(x-y\right)^2 = \frac{1}{2}mgx - mgy + \frac{1}{2}k\left(x-y\right)^2$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}mgx + mgy - \frac{1}{2}k\left(x-y\right)^2$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m\dot{x}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 3m\dot{y}$$

$$\dot{x} = \frac{2p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{3m}$$

Funkcja Hamiltona:

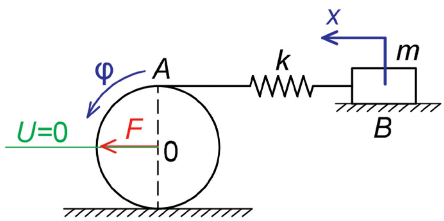
$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L$$

$$H = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{6m} + \frac{1}{2}mgx - mgy + \frac{1}{2}k\left(x-y\right)^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{2p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}mg - k\left(x-y\right) \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{3m} \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = mg + k\left(x-y\right) \end{cases}$$

Zadanie 6.18.



Rys. 6.18a

x, φ – współrzędne uogólnione (dwa stopnie swobody)

$$v_O = r\dot{\varphi}$$

$$v_B = \dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}4mv_O^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = 3mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = mgr + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi - x\right)^2 + U\left(\varphi\right)$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = 3mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgr - \frac{1}{2}k\left(2r\varphi - x\right)^2 - U\left(\varphi\right)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 6mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{6mr^2}$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

Funkcja Hamiltona:

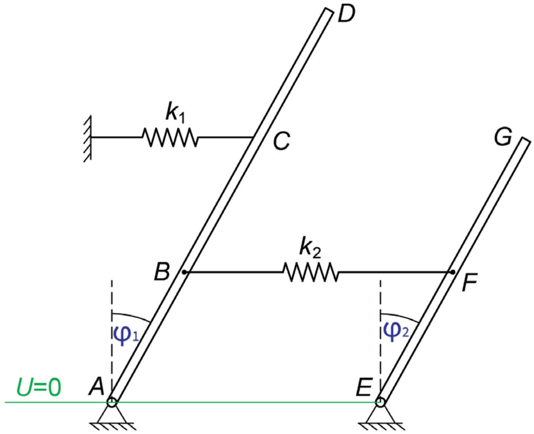
$$H = \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{x}p_x - L$$

$$H = \frac{p_\varphi^2}{12mr^2} + \frac{p_x^2}{2m} + mgr + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi - x\right)^2 + U\left(\varphi\right)$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{6mr^2} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -2kr\left(2r\varphi - x\right) - \dfrac{dU\left(\varphi\right)}{d\varphi}\, \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -2kr\left(2r\varphi - x\right) - \dfrac{dU\left(\varphi\right)}{d\varphi} \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2k\left(2r\varphi - x\right) \end{cases}$$

Zadanie 6.19.



Rys. 6.19a

φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione (dwa stopnie swobody)

$$T = \frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_E\dot{\varphi}_2^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}_2^2$$

$$U = 3mg\frac{3}{2}l\cos\varphi_1 + 2mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(l\sin\varphi_2 - l\sin\varphi_1\right)^2$$

$$U = 3mg\frac{3}{2}l\cos\varphi_1 + 2mgl\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1\left(2l\sin\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(l\sin\varphi_2 - l\sin\varphi_1\right)^2$$

$$U=\frac{9}{2}mgl\cos\varphi_1+2mgl\cos\varphi_2+2k\left(2l\sin\varphi_1\right)^2+\frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi_2-l\sin\varphi_1\right)^2$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L=T-U=\frac{9}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}_2^2-\frac{9}{2}mgl\cos\varphi_1-2mgl\cos\varphi_2-2k\left(2l\sin\varphi_1\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi_2-l\sin\varphi_1\right)^2$$

$$p_{\varphi_1}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}=9ml^2\dot{\varphi}_1$$

$$p_{\varphi_2}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}=\frac{8}{3}ml^2\dot{\varphi}_2$$

$$\dot{\varphi}_1=\frac{p_{\varphi_1}}{9ml^2}$$

$$\dot{\varphi}_2=\frac{3p_{\varphi_2}}{8ml^2}$$

Funkcja Hamiltona:

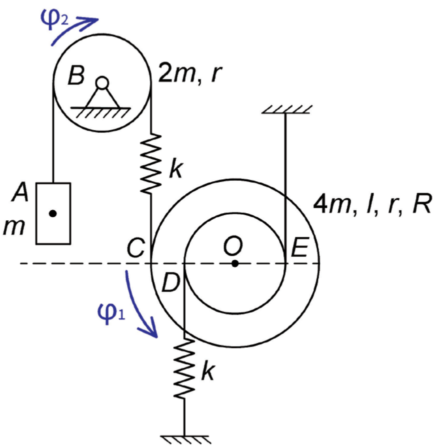
$$H=\dot{\varphi}_1p_{\varphi_1}+\dot{\varphi}_2p_{\varphi_2}-L$$

$$H=\frac{p_{\varphi_1}^2}{18ml^2}+\frac{3p_{\varphi_2}^2}{16ml^2}+\frac{9}{2}mgl\cos\varphi_1+2mgl\cos\varphi_2+2k\left(2l\sin\varphi_1\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k\left(l\sin\varphi_2-l\sin\varphi_1\right)^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1=\dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_1}}=\dfrac{p_{\varphi_1}}{9ml^2}\\ \dot{p}_{\varphi_1}=-\dfrac{\partial H}{\partial\varphi_1}=\dfrac{9}{2}mgl\sin\varphi_1+8kl^2\sin2\varphi_1+kl^2\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)\cos\varphi_1\\ \dot{\varphi}_2=\dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_2}}=\dfrac{3p_{\varphi_2}}{8ml^2}\\ \dot{p}_{\varphi_2}=-\dfrac{\partial H}{\partial\varphi_2}=2mgl\sin\varphi_2-kl^2\left(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\right)\cos\varphi_2\end{cases}$$

Zadanie 6.20.



Rys. 6.20a

φ_1, φ_2 – współrzędne uogólnione (dwa stopnie swobody)

$$v_A = r\dot{\varphi}_2$$

$$v_O = r\dot{\varphi}_1$$

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}_1^2 + 2mv_0^2 + \frac{1}{2}I_B\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}\left(I + 2mr^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

$$U = -4mgr\varphi_1 + mgr\varphi_2 + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(3r\varphi_1 - r\varphi_2\right)^2$$

Funkcja Lagrange'a:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(I + 2mr^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + mr^2\dot{\varphi}_2^2 + 4mgr\varphi_1 - mgr\varphi_2 - \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}k\left(3r\varphi_1 - r\varphi_2\right)^2$$

$$p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} = \left(I + 2mr^2\right)\dot{\varphi}_1$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2} = 2mr^2\dot{\varphi}_2$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{p_{\varphi_1}}{\left(I + 2mr^2\right)}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{p_{\varphi_2}}{2mr^2}$$

Funkcja Hamiltona:

$$H = \dot{\varphi}_1 p_{\varphi_1} + \dot{\varphi}_2 p_{\varphi_2} - L$$

$$H = \frac{p_{\varphi_1}^2}{2\left(I + 2mr^2\right)} + \frac{p_{\varphi_2}^2}{2mr^2} - 4mgr\varphi_1 + mgr\varphi_2 + \frac{1}{2}k\left(2r\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(3r\varphi_1 - r\varphi_2\right)^2$$

Wyznaczamy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_1}} = \dfrac{p_{\varphi_1}}{\left(I + 2mr^2\right)} \\ \dot{p}_{\varphi_1} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_1} = 4mgr - 13kr^2\varphi_1 + 3kr^2\varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_2}} = \dfrac{p_{\varphi_2}}{2mr^2}\,\dot{\varphi}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\varphi_2}} = \dfrac{p_{\varphi_2}}{2mr^2} \\ \dot{p}_{\varphi_2} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi_2} = -mgr + kr^2\left(3\varphi_1 - \varphi_2\right) \end{cases}$$

LITERATURA

[1] Banach S., *Mechanika*, PWN, Warszawa 1956.
[2] Bellomo N., Preziosi L., Romano A., *Mechanics and Dynamical Systems with Mathematica*, Springer – Science + Business Media, LLC 2000.
[3] Gantmacher F.R., *Wykłady z mechaniki analitycznej*, PWN, Warszawa 1972.
[4] Gutowski R., *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
[5] Hendzel Z., Żylski W., *Mechanika Ogólna, Dynamika*, Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2017.
[6] Leyko J., *Mechanika Ogólna 2*, PWN, Warszawa 1974.
[7] Lurie A.I., *Analytical Mechanics*, Springer 2002.
[8] Mieszczerski J., *Zbiór zadań z mechaniki*, PWN, Warszawa 1971.
[9] Misiak J., *Zadania z mechaniki ogólnej, Część III Dynamika*, wyd. VI zmienione, PWN, Warszawa 1994.
[10] Nizioł J., *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*, PWN, Warszawa 1980.
[11] Nizioł J, *Podstawy drgań w maszynach*, wyd. II, Politechnika Krakowska, Kraków 1996.
[12] Osiecki J., *Podstawy analizy drgań mechanicznych*, Politechnika Swiętokrzyska, Kielce 1979.
[13] Osiński Z., *Zbiór zadań z teorii drgań*, PWN, Warszawa 1989.
[14] Paluch M., *Mechanika teoretyczna*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.
[15] Rubinowicz W., Królikowski W., *Mechanika teoretyczna*, wyd. 9, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
[16] Skalmierski B., *Mechanika 3, Mechanika analityczna i teoria drgań*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2001.
[17] Susłow G.K., *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960.
[18] Szcześniak W., *Dynamika analityczna i Mathematica w zadaniach i przykładach obliczeniowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010.
[19] Taylor J. R., *Mechanika klasyczna 1*, PWN, Warszawa 2012.
[20] Taylor J. R., *Mechanika klasyczna 2*, PWN, Warszawa 2012.
[21] Witkowski Cz., *Zbiór zadań z mechaniki, Część III Elementy dynamiki i mechaniki analitycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2006.

Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

eISBN 978-83-67188-75-3